UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01218172 3

Presented to
The Library
of the
University of Toronto
by
the Estate of the late
Professor J.C. Fields

HANDBOUND
AT THE
UNIVERSITY OF

9929 1

1

35-

Differential- und Integral-rechnung

Vorlesungen von Prof. Dr. Felix Klein

Diff. Rechnung Sommersemester 1895
Int. " Winter " 1896/97

Diff. Rech. Excerpt der Ausarbeitung des Herrn Dr. Sommerfeld (von A.)
A. Rech. Ausarbeitung von A. Hauer

LIBRARY
SEP 20 1968
UNIVERSITY OF TORONTO

QA
303
K54

Inhalts-Verzeichniss der Differential Rechnung

I. Grundlegung

1. Einführung der einfachsten Funktionen einer Veränderlichen.

1. Algebraische Functionen
2. Logarithmische und Exponential Functionen.
3. Trigonometrische Functionen.

2. Definition und Berechnung des Differential-Quotienten.

4. Entstehung des Begriffes
5. Einfachste Beispiele
6. Eine nicht differentiierbare Function
7. Die höheren Differential-Quotienten.

3. Der Taylor'sche Lehrsatz.

8. Schmiegungsparabeln.
9. Das Restglied der Taylor'schen Reihe
10. Die Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$
11. Zusammenfassung der Resultate
12. Andere Schreibweise für die Taylor'sche Reihe (MacLaurin)

II. Anwendungen der Taylor'schen Reihe

1. Numerische Berechnung von Functionen

13. Sinus, Logarithmus.

14. Der allgemeine binomische Satz

15. arctg x und π

2. Angewandte Mathematik.

16. Verhältnis von Function und Functionsstreifen.

17. Interpolation.

18. Das Verfahren der partes proportionales

3. Contacte höherer Ordnung.

19. Noch einmal Schmiegungscurven incl. der Maxima-Minima.

20. Kettenbrüche.

4. Der Krümmungskreis

21. Allgemeine Erörterungen, Ellipse

22. Verschiedene Bestimmungsweisen

III. Erweiterungen der bisherigen Entwicklungen.

1. Singuläre Stellen der Functionen.

23. Beispiele und Figuren.

24. Die unbestimmten Formen der Analysis: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, etc.

2. Neue geometrische Anwendungen.

25. Parameterdarstellung ebener Curven.

26. Excurs über die Cycloiden.

27. Evolutentheorie.

28. Polarkoordinaten, logarithmische Spirale.

29. Implicite Curvendarstellung.

30. Theorie der singulären Punkte.

IV Funktionen zweier Variabeln.

1. Grundlegung.

31. Einfachste Beispiele.

32. Partielle Differential-Quotienten, nebst dem Satze: $s = s'$.

33. Der Taylor'sche Satz bei zwei Variabeln.

2. Flächenkrümmung.

34. Dreierlei Krümmung. Beziehung zur Theorie der Maxima und Minima.

35. Die Bedeutung des Schmiegungs-paraboloides 2ter Ordnung.

36. Die Krümmungsradien der Normal-schnitte.

3. 37 Excurs über Raumcurven (Tang. Ebene)

4. 38 Excurs über complexe Grössen.

Abschnitt I
Grundlegung
Kapitel I
Einführung der einfachsten Functionen einer veränderlichen.

§1 Algebraische Functionen

Unterscheide Constanten: a, b ... Variablen x, y ...

In $y = f(x)$

(gelesen: y gleich einer Funct. von x)

heisst y die abhängige, x die

Functionen können dargestellt werden

(definirt werden)

1. durch Curven auf Coordinaten —
   (nicht genau bestimmt wegen Ungenauigkeit jeder Zeichnung)
2. durch Tabelle. (Ungenau wegen Decimale
3. .. eine Rechenvorschrift.

Auf Grund dieser ergiebt sich folgende Eintheilung:

1. Functionen, erzeugt nur durch 4 Spezie
   a) ganze rationale Functionen
      (Addition, Subtr., Multip.)

Allgemeiner Ausdruck:

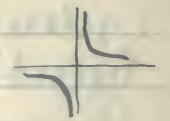
$$y = a + bx + cx^2 + \dots + kx^n$$

Anmerkung: Diese Curven heissen Parabel

b) gebrochene rationale Functionen
(ausserdem Division)
Allgemeiner Ausdruck

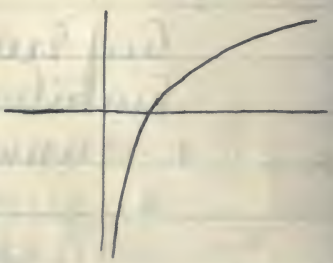
$$y = \frac{a + bx + \dots + kx^n}{a' + b'x + \dots + k'x^m} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

Anmerkung: Letzte Functionen werden
∞ für $\psi(x) = 0$.
z.B. Der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$

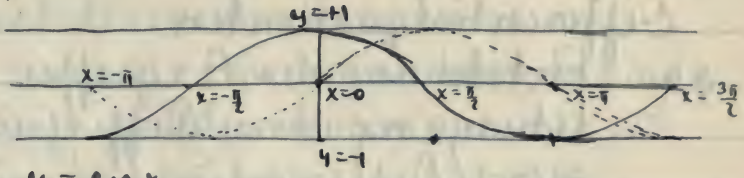


2. Functionen in denen Wurzelzeiche
vorcommen.
Beispiel $y = \sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$

§2 Die logarithmische und Exponential-
Function.
z.B. cf Lampe, Einleitung.

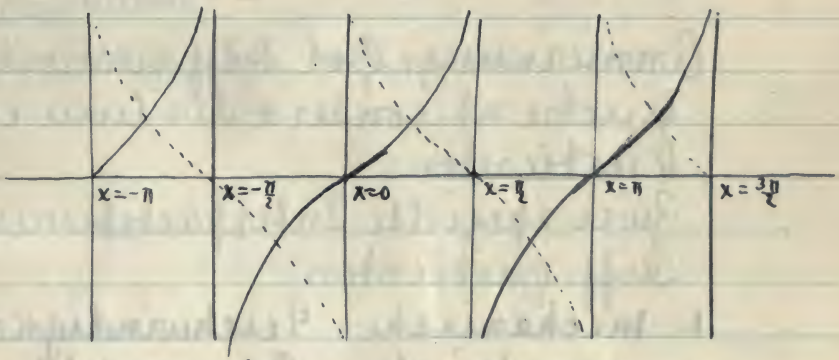


§ 3. Die trigonometrischen Functionen. Definition derselben ([illegible]etwas Lampe



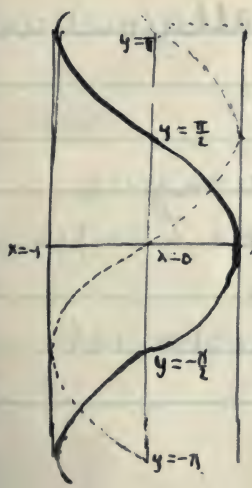
—— $y = \cos x$

····· $y = \sin x$



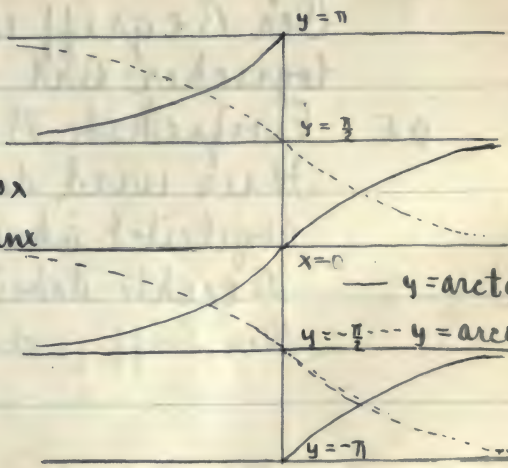
—— $y = \operatorname{tg} x$

····· $y = \operatorname{cotg} x$



—— $y = \arccos x$

····· $y = \arcsin x$



—— $y = \operatorname{arctg} x$

$y = -\frac{\pi}{2}$ ··· $y = \operatorname{arccotg} x$

Kapitel II

Definition und Berechnung des Differentialquotienten.

§ 4. Entstehung des Begriffes.
Übergang vom Differenzenquotient zum Differentialquos.

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Anmerkung: Der Diff. quotient ist kein Quotient sondern der Limes eines Quotienten.
Zwei spezielle Interpretationen des Diff. quotienten
1. mechanische: Geschwindigkeit.
2. geometrische: Curvenrichtung.
Der Begriff ist jedoch allgemeiner, logischer Art.

§ 5. Einfachste Beispiele.
Hier wird das Handwerkzeug abgeleitet ähnlich wie bei Lampe.
Beachte dabei folgendes:
Der Diff. quotient von arcsin ist

$\frac{+1}{\sqrt{1-x^2}}$ oder $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

je nachdem wir uns im 1 und 4 oder 2 und 3 Quadranten befinden.
Der Diff. quotient von arccos. x ist
$\frac{+1}{\sqrt{1-x^2}}$ wenn wir uns im 3 und 4

$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ wenn " " " 1 " 2
Quadranten befinden.

§6. Eine nicht differentiirbare Function.

Frage. Strebt der Differenzquotient allemal einer festen Grenze zu bei abnehmendem Δx?

Oder: Hat jede Curve eine Tangente?

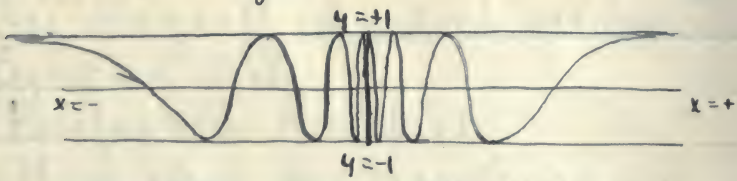
" " " Bewegung eine Geschwindigkeit?

Antwort: nein!

Beispiel 1:

$$y = \sin \frac{1}{x}$$

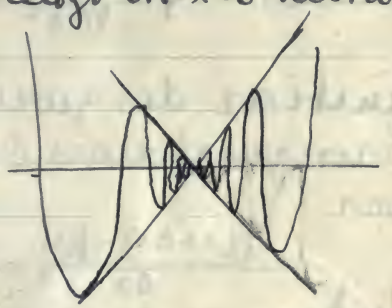
Die Stellen verdichten sich auf die Stelle $x=0$ hin. Im Punkte $x=0$ ist die Function selbst unbestimmt. Wir können ihr die ganze Strecke (-1 bis +1) hinzurechnen.



Beispiel 2: $y = x \sin \frac{1}{x}$

Indem wir jede Ordinate der vorigen Curve mit der Ordinate der Curve $y=x$ multipliciren, entsteht eine neue

Wellenlinie, welche für $x=0$ einen ganz bestimmten Wert hat ($y=0$). Dennoch hat sie in $x=0$ keinen bestimmten Diff. quotienten. Zeichnen wir nämlich die Secante OP, welche den Differenzenquotient repräsentiert und lassen P successive nach O rücken, so kommen wir zu keiner Grenzlage der Secante, vielmehr oscilliert dieselbe beständig in dem Flächenraum $\pm 45°$ gegen die x-Axe herum, und zwar oscilliert sie um so schneller, je näher P dem O kommt. Also: Die $y = x \sin \frac{1}{x}$, welche ganz bestimmte endliche Werte hat und überall stetig verläuft, besitzt in $x=0$ keinen Diff. quotient.



§ 7. Die höheren Diff. quotienten.

Aus $f(x)$ bildet man

$$\frac{d f'(x)}{dx} = f''(x) = y'' \text{ etc.}$$

Tabelle:

1. $y = x^n \quad y' = n x^{n-1} \quad y'' = n(n-1) x^{n-2} \; \cdots \; y^{(n)} = n!$
   alle folgenden sind $= 0$
2. $y = e^x \quad y' = e^x \quad y'' = e^x \; \cdots$
3. $y = \log x \quad y' = \frac{1}{x} \quad y'' = -\frac{1}{x^2} \; \cdots$
4. $y = x^n$ wo n keine +ve ganze Zahl bedeuten soll. Die Diff. quotienten haben genau dieselbe Form, wie sub 1, nur dass ihre Reihe jetzt nicht abbricht.
5. $y = u \cdot v \quad y' = u'v + v'u \quad y'' = u''v + 2u'v' + v''u \; \cdots$
6. $y = \sin x \quad y' = \cos x \quad y'' = -\sin x \; \cdots$
7. $y = \arcsin x \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad y'' = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \; \cdots$

Definition des zweiten Diff. quotienten als Grenzwert eines Differenzenquotienten

Es war

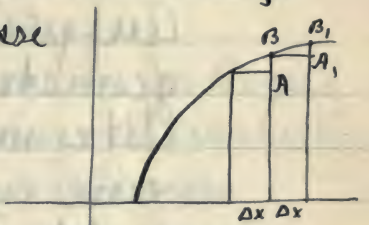
$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ähnlich

$$\frac{\dfrac{f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x)}{\Delta x} - \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2}$$

Den Ausdruck, der auf der rechten Seite im Zähler steht nennt man die „zweite Differenz". Man bezeichnet sie mit $\Delta^2 y$.

In der Figur ist diese Größe gleich der Differenz der Strecken $A_1 B_1$ und AB:



Also

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d f'(x)}{dx} = f''(x) = y''$$

Entsprechend wird

$$y^{(n)}(x) = y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Kapitel III

Der Taylor'sche Lehrsatz

§8. Schmiegungsparabeln

Aufgabe um die es sich handeln wird geometrisch:
Ist es möglich eine Curve $y = f(x)$ durch eine einfachere zu ersetzen und durch welche?
Lösung: Die einfachsten Curven sind die Parabeln

$$y = a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n$$

1) Annäherung durch eine Parabel
1ter Ordnung:

$$y = a + bx$$

a und b werden so bestimmt, dass $y = y_0, y' =$
Dabei wählen wir lieber die Form:

$$y = \alpha + \beta(x - x_0)$$

Es ergibt $\alpha = y_0$, $\beta = y_0'$. Eingesetzt:

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0).$$

2) Annäherung durch eine Parabel 2ter Ordn

$$y = a + bx + cx^2$$

Dafür

$$y = \alpha + \beta(x - x_0) + \gamma(x - x_0)^2$$

Bedingungen: $y = y_0$, $y' = y_0'$, $y'' = y_0''$
Daraus folgt für $x = x_0$: $\alpha = y_0$ $\beta = y_0'$ $2\gamma = y_0''$.
Also

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2}(x - x_0)^2$$

Anmerkung: Wir definieren: In Bezug auf Convexität und Concavität verhalten sich die beliebigen Curven in einem Punkte x_0, y_0 wie die Schmiegungsparabel. Vergleichen wir die Lage der Schmiegungsparabel mit der der Tangente. Die Gleichungen beider unterscheiden sich nur durch das Glied $\frac{y''}{2}(x - x_0)^2$.
Ist y'' positiv, so werden die Ordinaten der Parabel beständig grösser sein, wie die der Tangente; die Parabel liegt oberhalb der Tangente und ist nach oben geöffnet, d.h. konkav. Ist y_0'' negativ, so ist die Parabel nach unten hin konkav.

3. Die allgemeine Schmiegungsparabel.
Schreibe

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1}(x - x_0) + \text{- - - - - -} + \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n$$

Verification: Für $x = x_0$ wird $y = y_0$, $y' = y_0'$; $\cdots y^{(n)} = y_0^{(n)}$.

Beispiele:

I. $y = e^x$

Die Exponentialcurve soll im Punct $x_0 = 0$ durch Parabeln approximiert werden
Man findet:

$$y_0 = y_0' = y_0'' = \dots = 1$$

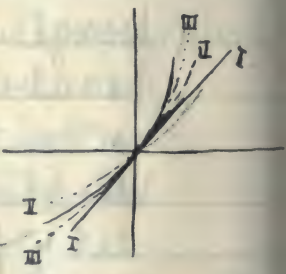
Also haben die Parabeln 1, 2, 3 Ordnung

I $y = 1 + x$

II $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$

III $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$.

vergleiche mit der Reihe e^x.



II $y = \sin x$ soll in $x = 0$ approximiert werden
Nach früherer Tabelle ist $y_0 = 0$ $y_0' = 1$ $y_0'' = 0$
Demnach sind die Parabeln

I $y = x$

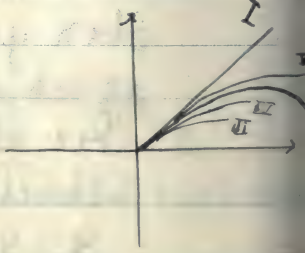
II $y = x$

III $y = x - \frac{x^3}{3!}$

IV $y = x - \frac{x^3}{3!}$

V $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

u. s. w.



(Bemerkung: wo $y_0'' = 0$ hat die Curve in dem Puncte einen Wendepunct

III $y = \log(1+x)$

Es ist

$$y_0 = 0,\ y_0' = 1,\ y_0'' = -1\quad y_0''' = 1\cdot 2\quad y_0^{(IV)} = -1\cdot 2\cdot 3 \cdots$$

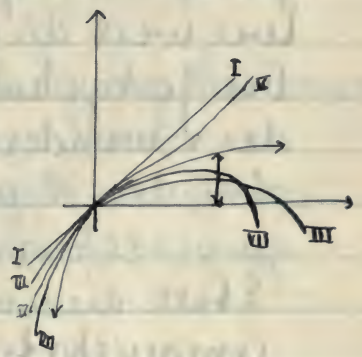
Daher wird

I $y = x$

II $y = x - \frac{x^2}{2}$

III $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

IV $y =$



Bemerke die plötzliche starke Abweichung bei ungefähr $x=1$.

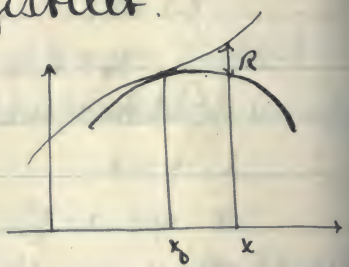
§9 Das Restglied der Taylor'schen Reihe.

Es ist

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1}(x-x_0) + \cdots\cdots + \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x,x_0)$$

Frage: Können wir durch Vergrössern von n das R beliebig klein werden lassen? Denn nur dann können wir die Curve durch eine Parabel $n$ter Ordnung ersetzen. In der Figur ist R als Differenz zwischen der Ordinate

der Grundcurve und der n^{ten} Schmiegungs-
parabel im Punkte x dargestellt.
In $x=x_0$ ist R natürlich
gleich 0. Wir fragen also:
Wie weit dürfen wir
bei festgehaltenem x_0
das x wandern lassen,
ohne dass R aufhört mit wachsendem n
zu verschwinden?



Statt diesem schlagen wir jedoch den
umgekehrten Weg ein. Wir halten x fest,
und lassen den Berührungspunkt wandern.
Daher setzen wir statt des festen x_0 das
variable ξ.
Wir fragen jetzt: Wie weit darf ξ wandern
und besonders: dürfen wir es bis $\xi=x_0$
gehen lassen?
Wenn bestimmte Verhältnisse zu haben sind

$$x \geqq \xi \geqq x_0.$$

Da wir jetzt die Annäherungsparabeln
im Punkte ξ construieren, werden wir
nicht $y_0\ y_0'\ y_0''$ im Punkte x_0 sondern y_ξ, y_ξ', y_ξ''
im Punkte ξ brauchen.

Dann ist

$$R(x,\xi) = y - y_\xi - y'_\xi \frac{x-\xi}{1} - y''_\xi \frac{(x-\xi)^2}{2!} - \cdots - y^{(n)}_\xi \frac{(x-\xi)^n}{n!}$$

Bei festem x ist nun $R = f(\xi)$ sagen wir eine Curve $\eta = R(x,\xi)$.
Berechnen wir die Steigung der Tangente gegen die x-Axe, so ist:

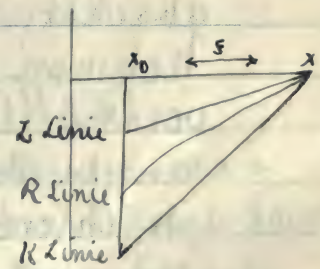
$$\frac{dy}{d\xi} - \frac{dR}{d\xi} = -y'_\xi - y''_\xi \frac{x-\xi}{1} - y'''_\xi \frac{(x-\xi)^2}{1\cdot 2} - \cdots - y^{(n+1)}_\xi \frac{(x-\xi)^n}{n!}$$
$$+ y'_\xi + y''_\xi \frac{x-\xi}{1} + \cdots + y^{(n)}_\xi \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}$$

1. $$\frac{dR}{d\xi} = -y^{(n+1)}_\xi \frac{(x-\xi)^n}{n!}$$

Auf Grund dieser Formel können wir nun $R(x\,\xi)$ abschätzen.
Es sei K und L der Maximal und Minimal Wert von $\frac{dR}{d\xi}$ im Intervalle

$$x_0 < \xi < x$$

Dann zeichnen wir zwei Linien K und L die bez den Diff. quotient K und L haben, sodass die η Linie zwischen K und L liegen muss.



In $\xi = x_0$ hat nun die K (resp. ζ) Linie die Ordinate $(x_0 - x) K$ (resp. $(x_0 - x)\zeta$). Daher die Ungleichung:

2. $$K(x_0 - x) \leqq R \leqq \zeta (x_0 - x)$$

Die Bedeutung dieses Resultats, wollen wir uns an den früheren Beispielen klarmachen.

(1.) $y = e^x \qquad x_0 = 0$

$$\frac{dR}{d\xi} = - \frac{e^\xi (x-\xi)^n}{n!}$$

Dann sei

$$K = - \min. \frac{e^\xi (x-\xi)^n}{n!} = - \zeta'$$

$$\zeta = - \max. \frac{e^\xi (x-\xi)^n}{n!} = - K'$$

wo wir K und ζ (oder K' und ζ') nur abschätzen wollen.
Nehmen wir nun von den beiden veränderlichen Faktoren e^ξ und $(x-\xi)^n$ einzeln das Maximum, so erhalten wir in ihrem Product eine Grösse die sicherlich grösser ist als K' bez. ζ'.
Es ist im Intervalle $0 < \xi < x$.

Das Maximum von e^ξ ist $= e^x$ das Min. $= 1$

" " " $(x-\xi)^n$ " $= x^n$ " " $= 0$.

Mithin dürfen wir setzen:

$$K' = \frac{e^x x^n}{n!}, \quad L' = 0$$

Diese Werte tragen wir in die Gleichung 2) ein, die wir aus Rücksicht auf 3) so schreiben können:

$$L'(x - x_0) \leqq R \leqq K'(x - x_0);$$

wir erhalten dann

$$0 \leqq R \leqq \frac{e^x x^{n+1}}{n!}.$$

da x_0 den Wert 0 hat.

Damit ist die verlangte Abschätzung geleistet.

2) $y = \sin x$, $x_0 = 0$, $x > 0$.

Die ersten Glieder der Reihe lauten

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Ferner ist

$$\frac{dR}{d\xi} = \mp \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \xi \, (x - \xi)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

Ob wir in diesem Ausdruck - oder +, sin oder cos zu setzen haben, hängt davon ab, welche Zahl wir für n eintragen wollen. Wir brauchen uns darüber nicht

schlüssig zu werden. Da nämlich in jedem Falle $\mp\binom{\sin}{\cos}\xi$ zwischen -1 und $+1$ liegt, und da x^n der grösste Wert ist, den $(x-\xi)^n$ in dem für uns in Betracht kommenden Intervalle $0 \leqq \xi \leqq x$ annimmt, so liegt $\frac{dR}{d\xi}$ fortgesetzt zwischen $-\frac{x^n}{n!}$ und $+\frac{x^n}{n!}$.
Wir haben damit bereits die Zahlen λ und K oder richtiger Zahlen, die grösser bezw. kleiner sind, als K bez. λ, gefunden. Nach Gleichung 2) ist ferner

$$-\frac{x^{n+1}}{n!} < R < +\frac{x^{n+1}}{n!}$$

Beide Grenzen nähern sich mit wachsendem n der Null.

3) $y = \cos x$

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

ebenfalls richtig ad inf. etc.

4) $y = \log(1+x)$

Es ist

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

wo der Rest

$$\frac{dR}{d\xi} = -(x-\xi)^n \varphi_\xi^{(n+1)} \cdot \frac{1}{n!} = (-1)^{n+1}\frac{(x-\xi)^n}{(1+\xi)^{n+1}}.$$

Hier fällt sofort ein Unterschied gegen die vorigen Beispiele ins Auge. Bei jenen lag nämlich der $(n+1)$te Diff. Quotient von y innerhalb derselben Grenzen, wie y selbst. Bei dem vorliegenden Beispiel aber wächst er (wegen des Factors $n!$) mit wachsendem n ins Unendliche. In der Taylor'schen Reihe bleibt daher als Nenner des $n$ten Gliedes nur noch n stehen; ihre Convergenz wird lange nicht so gut sein, wie bei den früheren Beispielen.

Schon die genaue Abschätzung des Restgliedes ist hier schwieriger, wie früher. Früher verglichen wir die Curve $\eta = R(\xi)$ mit zwei Geraden, der K Linie und der L Linie; diese Spielraum ist jetzt zu gross. Wir schränken sie folgendermassen enger ein.

Wir vergleichen die Restcurve mit zwei krummen Linien $\eta = S(\xi)$ und $\eta = T(\xi)$, die durch $\xi = x$ hindurchgehen sollen.

Ferner soll die Neigung dieser Curven betreffend, im Intervalle $x_0 \leqq \xi \leqq x$ stets sein

1) $$\frac{dT}{d\xi} \leqq \frac{dR}{d\xi} \leqq \frac{dS}{d\xi}$$

Von diesen Curven gilt, dass die R Curve wiederum ganz zwischen ihnen verlaufen muss. Insbesondere haben wir also für $\xi = x_0$

$$S(x_0) \leqq R(x_0) \leqq T(x_0)$$

Offenbar können wir den S und T Curven noch beliebige Gestalten geben. Am einfachsten bestimmen wir folgendes: Es sei M und N das Maximum von $y_\xi^{(n+1)}$ im Intervalle. Dann ist die Ordinate der S Curve

a) $$S = \frac{(x-\xi)^{n+1} N}{n+1}$$ " " " der T Cur

b) $$T = \frac{(x-\xi)^{n+1} M}{n+1}$$

Denn wird

$$\frac{dS}{d\xi} = -(x-\xi)^n N^{\min.} \qquad \frac{dT}{d\xi} = -(x-\xi)^n M^{\max.}$$

Andererseits wird nach der Definition von M u

$$\frac{dR}{d\xi} \leqq -(x-\xi)^n N \qquad \frac{dR}{d\xi} \geqq -(x-\xi)^n M.$$

Daraus folgt

c) $$\frac{dT}{d\xi} \leqq \frac{dR}{d\xi} \leqq \frac{dS}{d\xi}$$

Ferner ist für $\xi = x$, wie es sein soll:

d) $$S = 0 \qquad T = 0$$

Aus c) und d) ergiebt sich, dass wir die durch a) und b) definierten Functionen als S und T Curve in dem oben festgelegten Sinne benutzen können. Wir tragen die so verifizierten Werte von S und T in die Gleichung 2) ein und bestimmen die folgende neue Abschätzung des Restgliedes:

3. $$\frac{(x-x_0)^{n+1} N}{n+1} \leqq R(x_0) \leqq \frac{(x-x_0)^{n+1} M}{n+1}$$

Dieses Resultat wenden wir auf die Entwicklung von $\log(1+x)$ an.

Es war

$$\frac{f_\xi^{(n+1)}}{n!} = \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}}$$

Wir finden

Für n gerade: $M = 1 \qquad N = \frac{1}{(1+x)^{n+1}}$

" n ungerade $M = -\frac{1}{(1+x)^{n+1}} \quad N = -1$.

Daraufhin erhalten wir aus 3), wegen $x_0=0$,

wenn n gerade $\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}} \leqq R \leqq \frac{x^{n+1}}{n+1}$

" n ungerade $-\frac{x^{n+1}}{n+1} \leqq R \leqq -\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}}$

An diese Formeln knüpfen sich einige Schlüsse

1) Der Rest ist positiv, wenn wir nach einer geraden Anzahl von Gliedern unsere Entwicklung abbrechen. Im Hinblick auf die Fig. können wir dieses auch so ausdrücken: Die Parabeln gerader Ordnung liegen ganz unterhalb, die Parabeln ungerader Ordnung ganz oberhalb der Grundcurve.

2) Soviel über das Vorzeichen. Wie verhält es sich aber mit seiner Grösse? Da müssen wir zwei Fälle unterscheiden $x \leqq 1$ und $x > 1$ (indem wir uns der Kürze halber auch hier auf positive x beschränken).

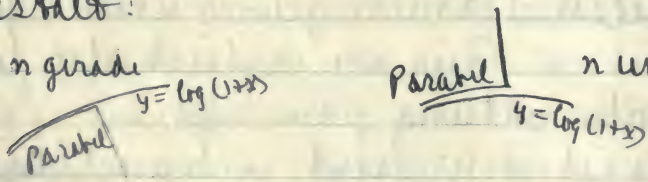
$\underline{x \leqq 1}$. In diesem Falle wird der Rest mit wachsendem n zu Null. Er wird nämlich selbst in dem ungünstigsten Falle $x = 1$ kleiner als $\frac{1}{n+1}$ bezw: grösser als $\frac{1}{n+1}$ (je nachdem n gerade oder ungerade ist). Im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ schliessen sich also die Annäherungs-

parabeln um so näher der Grundcurve an, je grösser n ist. In diesem Falle ist also die Taylor'sche Entwicklung richtig.
$x \geq 1$ Unsere Abschatzung liefert für $x > 1$ bei geradem bezw. ungeradem n unendlich wachsendem n

$$0 \leqq R \leqq \infty \quad \text{bezw.} \quad -\infty \leqq R \leqq 0$$

sie versagt also!
Zum Glück können wir das Verhalten der Reihe aus der Reihe selbst (für $x > 1$) ablesen.
Für $x > 1$ convergiert nämlich die Reihe nicht mehr. Denn es wird jedes folgende Glied der Reihe grösser als das vorhergehende. Mithin kann sich die Summe von beliebig vielen Termen gewiss keiner festen Grenze nähern. Für $x > 1$ verliert also die Taylor'sche Entwicklung jeden Sinn.
Es ist interessant, sich auch das Verhalten der Annäherungsparabeln im letzteren Falle klar zu machen. Wir sahen bereits früher, dass die Annäherungsparabeln gerader Ordnung für $x > 1$ nach unten hin

abfallen und zwar um so steiler, je grösser n wird. Desgleichen steigen die Annäherungsparabeln gerader Ordnung nach oben hin an. Dies bestätigt auch die analytische Untersuchung. Für $x > 1$ kommt es nämlich bei den Annäherungsparabeln wesentlich nur auf das Glied mit der höchsten Potenz in x an, und dieses wird, sobald x nur ein wenig grösser als 1 ist, $+\infty$ bei ungeradem, $-\infty$ bei geradem unendlich wachsendem n. Daher hat sozusagen die Parabel unendlich hoher Ordnung, d.h. diejenige Curve, welcher sich die Parabeln bei wachsender Ordnungszahl mehr und mehr annähern, die folgende Gestalt:



Man wird sich vielleicht aus unserem Beispiele die Regel ableiten wollen: Solange die Taylor'sche Entwickelung für irgend eine gegebene Function

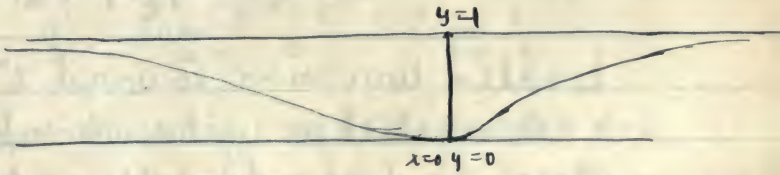
convergiert, solange stellt sie auch die gegebene Function dar. Wenn diese Regel richtig wäre, so wäre man der umständlichen Untersuchung des Restgliedes überhoben. Sie ist es aber nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

§10 Die Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$

Das erste und einfachste Beispiel dieser Art hat Cauchy in seinem für derartige Fragen grundlegenden Buche: Cours d'Analyse (1821) gegeben. Dasselbe lautet

$$y = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Die entsprechende Curve sieht folgendermassen aus:



Hülfssatz: Zunächst beweisen wir folgende Eigenschaft der Exponentialfunction.

Es wird für jeden Wert von α

$$\lim_{z=\infty}\left(\frac{z^\alpha}{e^z}\right)=0$$

oder in Worten ausgedrückt: Die Exponential-Function wächst mit positivem zunehmendem z rascher ins Unendliche, als irgend eine Potenz von z.

Es folgt dieses unmittelbar aus unserer ursprünglichen Definition der Function. Da nämlich in der Reihe

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\cdots$$

bei positivem z sämtliche Terme positiv sind, so ist e^z sicherlich grösser, als ein einzelnes Glied dieser Reihe, z.B. grösser als das $(m+1)$te Glied, also

$$e^z > \frac{z^m}{m!} \qquad \left|\frac{e^z}{z^\alpha}\right| > \left|\frac{z^{m-\alpha}}{m!}\right|$$

Wählen wir $m>\alpha$, so wird $z^{m-\alpha}$ mit wachsendem z schliesslich ∞, während $m!$ eine, wenn auch grosse, so doch jedenfalls endliche Zahl ist. Daher wird $\left|\frac{z^{m-\alpha}}{m!}\right|$ und umsomehr $\left|\frac{e^z}{z^\alpha}\right|$ mit wachsendem z unendlich.

Umgekehrt wird $\lim_{z=\infty}\left(\frac{z^\alpha}{e^z}\right)=0$. q.e.d.

[Die jetzige Behauptung widerspricht natürlich keineswegs der früher oft benutzten Thatsache, dass $\lim \frac{z^m}{m!}$ gleich Null wird; denn damals handelte es sich um den Grenzwert dieses Ausdruckes für $m=\infty$ bei festgehaltenem z, während hier von dem Grenzwert eines ähnlichen Ausdruckes für $z=\infty$ bei festgehaltenem m die Rede ist.]

Wir bilden nun successive die Werte der Function und ihrer Diff. quotienten an der Stelle $x=0$.

Zunächst haben wir $y_0 = 0$.

Nach der Definition des Diff. quotienten als Grenze eines Differenzenquotienten wird ferner:

$$y_0' = \lim_{\Delta=0} \frac{e^{-\frac{1}{\Delta^2}} - e^{-\infty}}{\Delta} = \lim_{\Delta=0} \frac{e^{-\frac{1}{\Delta^2}}}{\Delta}.$$

Setzen wir $\Delta = \frac{1}{\sqrt{z}}$ so entspricht dem Werte $\Delta=0$ der Wert $z=\infty$; daher haben wir:

$$y_0' = \lim_{z=\infty} \frac{z^{\frac{1}{2}}}{e^z}$$

oder, mit Benutzung unseres Hülfssatzes:

$$y_0' = 0$$

Ferner berechnen wir

$$y_0'' = \lim_{\Delta=0} \frac{f(x+2\Delta) - 2f(x+\Delta) + f(x)}{\Delta^2} = \lim \frac{e^{-\frac{1}{4\Delta^2}} - 2e^{-\frac{1}{\Delta^2}} + e^{-\infty}}{\Delta^2}$$

$$= \lim \frac{e^{-\frac{1}{4\Delta^2}}}{\Delta^2} - 2\lim \frac{e^{-\frac{1}{\Delta^2}}}{\Delta^2}$$

Beide Limes verschwinden nach unserem Hülfssatze. Setzen wir nämlich im ersten bezw. zweiten Lim.

$$4\Delta^2 = \frac{1}{z} \quad \text{bez.} \quad \Delta^2 = z'$$

so wird:

$$y_0'' = \lim_{z=\infty} \left(\frac{4z}{e^z}\right) - 2\lim_{z'=\infty} \left(\frac{z'}{e^{z'}}\right) = 0.$$

So fortfahrend berechnen wir für sämtliche Differentialquotienten von y an der Stelle $x_0 = 0$ den Wert Null. Fragen wir diese Werte in die Formel des Taylor'schen Lehrsatzes ein, so bestimmen wir

$$y = 0 + 0 + 0 + \cdots\cdots$$

eine Reihe, welche ausgezeichnet convergiert und doch nicht den richtigen Wert von y darstellt. Der Fehler liegt darin, dass wir uns nicht um das Restglied gekümmert haben.

In der That zeigt die genauere Untersuchung, die wir unterdrücken müssen, dass im vorliegenden Falle das Restglied nicht gegen Null convergiert. Daher dürfen wir die unbegrenzte Taylorsche Reihe auf unsere Funktion nicht anwenden.

§ 11. Zusammenfassung der Resultate. Wir haben früher unter der Annahme

$$x_0 \leqq \xi \leqq x$$

die beiden Formeln abgeleitet:

1) $$K(x_0 - x) \leqq R \leqq \mathfrak{L}(x_0 - x)$$

2) $$\frac{N(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \leqq R \leqq \frac{M(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

Dabei bedeutete K bezw. $\mathfrak{L}$ das Max. bezw. Min. von

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!} y_\xi^{(n+1)}$$

und M bezw N das Max bezw. Min. von

$$\frac{y_\xi^{(n+1)}}{n!}$$

Wir wünschen statt der Formeln 1) und 2) solche zu erhalten, in denen nicht das

Zeichen $<$, sondern das uns gewohnte Zeichen $=$ vorkommt.

1) Bezeichnen wir mit P einen geeignet zuwählenden Zwischenwert zwischen K und α, so können wir offenbar setzen:

$$R = P(x_0 - x)$$

Dieser Zwischenwert P wird nach der Bedeutung von K und α, sofern $y_\xi^{(n+1)}$ im Intervalle $x_0 \leqq \xi \leqq x$ stetig ist, gleich dem Werte von $-\frac{(x-\xi)^n}{n!} y_\xi^{(n+1)}$ an einer geeignet zu wählenden Stelle ξ sein, welche uns allerdings unbekannt ist, von der wir aber wissen, dass sie zwischen x_0 und x liegen muss; (vielleicht gibt es auch mehrere solche Stellen ξ). Dieses drücken wir aus, wenn wir setzen $\xi = x_0 + \Theta(x - x_0)$ unter dem typischen Zeichen Θ einen unbekannten echten Bruch verstanden. Wir können somit setzen:

$$P = -\frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\Theta)^n y^{(n+1)}_{x_0+\Theta(x-x_0)}}{n!}$$

und

$$1. \qquad R = \frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\Theta)^n y_{x_0+\Theta(x-x_0)}}{n!}$$

2) Es bedeute Q einen geeignet zu wählenden Zwischenwert zwischen M und N. Dann haben wir nach der zweiten Abschätzung des Restgliedes:

$$R = \frac{Q(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

Ist wiederum $y_\xi^{(n+1)}$ eine stetige Funktion von ξ, so wird Q nach der Bedeutung von M und N gleich dem Werte von $\frac{y_\xi^{(n+1)}}{n!}$ für einen geeignet zu wählenden Wert von ξ werden, welcher zwischen x_0 und x gelegen sein muss. Bezeichnen wir den letzteren mit $x_0+\theta(x-x_0)$, wobei $0 \leqq \theta \leqq 1$, so können wir schreiben:

$$Q = \frac{y^{(n+1)}_{x_0+\theta(x-x_0)}}{n!}$$

und

2. $$R = \frac{(x-x_0)^{n+1}\, y^{(n+1)}_{x_0+\theta'(x-x_0)}}{(n+1)!}$$

Die Formeln (1) und (2) sind die zumeist benutzten Formen des Restgliedes nach Cauchy.

§12. Andere Schreibweisen für die Taylor'sche Reihe.

Wenn wir die abhängige Variable nicht durch y sondern durch $f(x)$ bezeichnen, so wird

I $$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) + \cdots\cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n$$

wobei

$$R_n = \frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}$$

bezw.

$$R_n = \frac{(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0+\theta'(x-x_0))}{(n+1)!}$$

je nachdem wir die erste oder die etwas schärfere zweite Abschätzung benutzen.

Den besonderen Fall der Taylor'schen Reihe wo $x_0 = 0$, hat man mit dem besonderen Namen Mac Laurin'sche Reihe bezeichnet.

Sie lautet:

II $$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots\cdots + R_n$$

wobei

$$R_n = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}$$

bezw.

$$R_n = \frac{x^{n+1} f^{(n+1)}(\theta' x)}{(n+1)!}$$

Schreiben wir endlich x statt x_0 und $x+h$ statt x, so wird

III $f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots + R_n$

wobei

$$R_n =$$

bezw.

$$R_n =$$

Alle diese drei Gleichungen besagen im Prinzip ganz dasselbe.

Abschnitt II
Anwendungen der Taylor'schen Reihe.
Kapitel I
Numerische Berechnung von Funktionen

§13. Sinus, Logarithmus.
(siehe Stegemann-Kiepert p. 182 ff.)

§14. Der allgemeine binomische Satz.
siehe Stegemann-Kiepert p. 157

§15. Arctg x und π
siehe Stegemann-Kiepert p. 181

Die sogenannte Leibniz'sche Reihe
taugt nicht zur numerischen Berechnu

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

da für 4 Dezimalen mindestens 5000
Glieder notwendig wären.
Besser ist die Euler'sche Reihe.
Es geht aus von der Formel:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Setzen wir hierin $tg\alpha = \frac{1}{2}$, $tg\beta = \frac{1}{3}$, so wird $tg(\alpha+$

Daher ist $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ oder $\frac{\pi}{4} = \text{arctg}\frac{1}{2} + \text{arctg}\frac{1}{3}$.
Die Reihen für $\text{arctg}\frac{1}{2}$ und $\text{arctg}\frac{1}{3}$ convergieren viel besser wie die Leibnizsche Reihe für $\text{arctg}\,1$. Wir können also mit Euler die Zahl π so berechnen

$$\frac{\pi}{4} = 1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{2^5} - \text{- - - -}$$

$$+ 1 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{3^5} - \text{- - - -}$$

Ueberhaupt werden wir $\frac{\pi}{4}$ durch die Summe mehrerer arctg. Reihen immer dann berechnen können, wenn wir $\frac{\pi}{4}$ in die Summe mehrerer Winkel zerlegen können, deren Tangenten-Werte einzeln bekannt sind, und zwar um so bequemer, je kleiner diese Werte ausfallen.
Der englische Astronom Machin bemerkte, dass

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\text{arctg}\frac{1}{5} - \text{arctg}\frac{1}{239}$$

und berechnete π auf 100 Dezimalen.
Gauss gibt (vergl. Werke Bd. II p. 525) eine ganze Reihe von solchen Zerlegungen an
z. B.

$$\frac{\pi}{4} = 12\,\text{arctg}\frac{1}{38} + 20\,\text{arctg}\frac{1}{57} + 7\,\text{arctg}\frac{1}{239} + 24\,\text{arctg}\frac{1}{268}$$

Hier entsteht $\frac{\pi}{4}$ als Summe von 63 Winkeln von denen jeder einzelne sehr klein ist.

Anmerkung: Das Unbefriedigtsein des Taylor'schen Satzes auf diese Weise kann erst in der Functionentheorie gehoben werden.

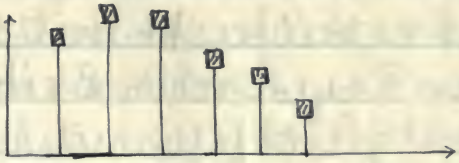
Kapitel II

Angewandte Mathematik.

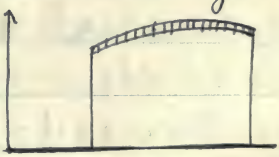
§16 Verhältniss von Function und Functionsstreifen.

Angewandte Mathematik ist abgekürzte M.-
Unterscheide zwei Arten von Beobachtungen:

1) Es wird in einzelnen discontinuirlichen Intervallen beobachtet.
Keine Punkte sind zu zeichnen sondern Flächenstücke.



2) Man lässt einen Registrirapparat arbeiten, welcher continuirlich aber in Streifen von endlicher Breite zeichnet.



O aber kann im abstrakten Sinne des Wortes eine Function niemals bestimmt werden, sie kann nur eingegrenzt werden.

Wie steht es nun mit der Potenzentwicklung solcher Functionen? Man liest häufig: Irgend welche Beobachtungen werden durch ein Polynom z. B. durch $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ genau dargestellt.
Damit meint man natürlich nur: Dass die Differenz zwischen den Ordinaten der Parabel und den Beobachtungen unter der Genauigkeitsgrenze liegen.
Woher bekommt man ein solches Polynom? Ist es vielleicht mit den ersten Gliedern der Taylor'schen Reihe identisch?
Die gleichfalls mit dem 4ten Gliede abgebrochene Taylor'sche Reihe lautet:

$$y = y_0 + \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x} \cdot \frac{x}{1} + \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} \frac{x^2}{2!} + \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta x^3} \frac{x^3}{3!}$$

Wenn dies der Fall ist, so müsste sein

$$a = y_0 \quad b = \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x} \text{ etc.}$$

Die erste Gleichung bestimmt uns a, aber mit der Ungenauigkeit, welche den Beobachtungen anhaftet. Um aus der zweiten Gleichung b zu bestimmen,

müssen wir $\frac{\Delta y_0}{\Delta x}$ aus den Beobachtungen herleiten und dann zur Grenze übergehen. Um nun von der vollkommeneren 2ten Beobachtungsmethode zu reden, haben wir einen Punkt des Streifens mit der Abscisse x_0 zu verbinden mit einem Punkte des Streifens mit der Abscisse $x_0 + \Delta x$ und den letzteren in den ersteren hineinrücken zu lassen. Die Grenzlage der Verbindungslinie gäbe die gesuchte Grösse b. Diese Grenzlage ist aber gänzlich unbestimmt. Wir können den Punkt $x_0 + \Delta x$ nämlich noch in allen möglichen Richtungen innerhalb des Streifens in den Punkt x_0 hineinrücken lassen.
Also: von einem Diff. quotienten kann im streng mathematischen Sinne des Wortes bei einer durch Beobachtungen bestimmten Function nicht die Rede sein. Damit fällt auch die Verwendbarkeit der Taylor'schen Reihe für solche Beobachtungsstreifen.
Will man dennoch von einem Diff. Quot.

eines Beobachtungsstreifens sprechen, so muss man die Sache gerade umgekehrt anfassen. Man muss nicht nach Taylor die Potenzentwicklung aus den Diff. Quotienten herleiten wollen, sondern vielmehr die Diff. Quotienten aus der Potenzentwicklung definieren.

Das ist so zu verstehen: Man suche eine Parabel

$$y = a + bx + cx^2 + \cdots + \kappa x^n$$

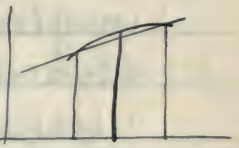
welche so beschaffen ist, dass sie ganz in den Beobachtungsstreifen hineinfällt. Unter den Diff. Quotienten an der Stelle $x=$ verstehe man dann die Grössen:

$$y_0' = b \quad y_0'' = 2 \cdot 1 c \quad \cdots \quad y_0^{(n)} = n! \kappa.$$

Auch so sind sie noch nicht ganz bestimmt. Denn man wird verschiedene Parabeln in den Streifen hineinlegen können.

Wir definieren daher die Diff. quotienten durch die Coefficienten der einfachsten Parabel, d. h. der Parabel von niedersten Grade, welche bereits ganz innerhalb des Streifens verläuft.

Im einzelnen verfährt man meist folgendermassen:
Da eine Parabel nter Ordnung in ihren Coefficienten n+1 Willkürlichkeiten hat, wird man sie zwingen können durch n+1 Punkte hindurchzugehen. Zunächst versucht man es mit einer Parabel 1ter Ordnung (gerader Linie). Von dieser verlangt man, dass sie durch zwei Punkte geht, welche als Abscissen die Anfangs- und Endabscissen des Beobachtungsstreifens haben.



Die Gerade ist die Verbindungslinie dieser beiden Punkten. Liegt diese nicht im Streifen, so nimmt man den Mittelpunkt des Beobachtungsintervalles hinzu und sucht sich einen Punkt des Streifens aus, welcher zu dieser Abscisse gehört. Man zeichnet nun durch diese 3 Punkte eine Parabel 2ter Ordnung. Ist es noch nicht genau genug, so teilt man das Intervall in 3 gleiche Teile und

n nimmt 4 Punkte des Streifens, durch welche man eine Parabel 3ter Ordnung legt: u.s.f.
Dass wir das Beobachtungsgebiet gerade in gleiche Teile einteilen, ist allerdings etwas willkürlich. Es handelt sich hier überhaupt nur um eine willkürliche Festsetzung dessen, was wir die Diff. quotient eines Streifens nennen wollen. Wie solche Parabeln construiert werden, davon handelt die Interpolationsrechnung.

§17 Interpolationsrechnung.

Es seien

$$y_0\ y_1\ y_2 \dots y_n$$

n+1 Ordinaten, welche zu den Abscissen

$$x_0\ x_1\ x_2 \dots x_n$$

gehören. Alle diese Grössen denken wir uns jetzt genau definiert.
Wir stellen uns die Aufgabe, eine Parabel

$$y = a + bx + cx^2 + \dots + kx^n$$

zu construieren, welche durch die n+1 Punkte $(x_i; y_i)$ hindurchgeht.

Theoretisch ist diese Aufgabe sofort gelöst. Man schreibe sich die Gleichung

$$y_i = a + bx_i + cx_i^2 + \cdots + kx_i^n.$$

für $i = 0, 1, \ldots n$ hin. Man hat dann $n+1$ lineare Gleichungen, aus denen man die $n+1$ unbekannten Coefficienten mittelst Determinanten berechnen kann. Praktisch ist aber damit nichts gewonnen, denn von der Determinanten gilt, sobald die Gliederzahl einigermaßen beträchtlich wird: sie sind theoretisch sehr schön, aber zur wirklichen Ausrechnung möglichst ungeeignet.

Es ist in unserem Falle aber leicht, die Gleichung der Parabel direct hinzuschreiben. Wir haben dabei nur zu verificieren, dass sie wirklich durch die $n+1$ Punkte $(x_i\ y_i)$ hindurchgeht. Die folgende Formel heisst nach ihrem Entdecker die Lagrange'sche Interpolationsformel:

$$y = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} + \cdots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

Setzen wir hierin $x = x_0$, so verschwinden

alle Summanden bis auf den ersten und
dieser reduziert sich auf y_0.
Ebenso wird für $x=x_1$ die rechte Seite gleich
und so allgemein. Die Lagrange'sche Interp.
Formel gibt also wirklich die gesuchte Parab
Es ist lehrreich, diese Formel noch abzuän
folgendermassen zu schreiben: Bezeichnen
wir mit $\varphi(x)$ das Polynom $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$
so wird $\varphi'(x)$ für $x=x_0$ gleich $(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)$
und allgemein für $x=x_i$ gleich dem $i$ten
Nenner in unserer früheren Formel.
Wir können also schreiben:

$$y = \varphi(x)\left\{\frac{y_0}{\varphi'(x_0)}\frac{1}{x-x_0} + \cdots + \frac{y_n}{\varphi'(x_n)}\frac{1}{x-x_n}\right\}$$

Um uns den Sinn der Formel noch näher
zu führen, setzen wir

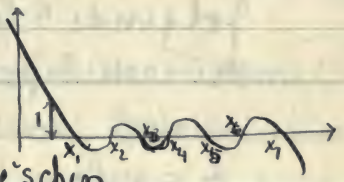
$$y = y_0 P_0(x) + y_1 P_1(x) + \cdots + y_n P_n(x)$$

indem wir unter $P_0(x)$ etc eben jenes Polyno
$n$ten Grades verstehen, welches in unserer
ersten Formel mit y_0, y_1 etc multipliciert i
Jedes dieser Polynome, einzeln gleich einer
neuen abhängigen Variabeln gesetzt, stellt
eine Parabel dar.

Wir haben so $n+1$ Teilparabeln von uns und die gesuchte Parabel y entsteht durch Uebereinanderlegung dieser $n+1$ Teilparabeln, jede multiplicirt mit einer der Grössen $y_0\ y_1 \ldots y_n$.

Die Teilparabeln haben folgende Charaktereigenschaft. Die Teilparabel $y_\nu = P_\nu(x)$ hat bei $x = x_\nu$ die Ordinate 1, an allen andern Stellen x_i die Ordinate 0.

Man übersieht nun sofort, dass bei dieser Bestimmung der Teilparabeln in der Lagrange'schen Interpolations Formel der Wert $y = y_\nu$ an der Stelle $x = x_\nu$ heraus kommen muss. Denn alle Teilparabeln haben an dieser Stelle die Ordinate 0, ausser P_ν und daher ergiebt sich $y = y_\nu 1$.



Für eine andere, die Newton'sche Interpolationsformel brauchen wir die Bezeichnung und Begriffe der „Differenzenrechnung".

„Der Begriff des Differenzenquotienten

ist uns schon mehrfach begegnet $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Wir stellen die hierauf bezüglichen
Formeln im Anschluss an unsere
Interpolationsaufgabe schematisch
zusammen. Wir müssen dabei uns die
$n+1$ Beobachtungsabscissen von jetzt an
als äquidistant denken, also
$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1}$ = einer festen Grösse
Δx nehmen. Dann werden definiert durch
folgende Gleichungen

$y_0 = y_0$	$\Delta y_0 = \Delta y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta^2 y_0$
$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$\Delta y_1 = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0$	$\Delta^2 y_1 = \Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$
$y_2 = y_1 + \Delta y_1$	$\Delta y_2 = \Delta y_1 + \Delta^2 y_1$	
		etc
$y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1}$	$\Delta y_{n-1} = \Delta y_{n-2} + \Delta^2 y_{n-2}$	

Umgekehrt braucht man nur die in de
2ten 3ten --- Colonnen erklärten Grösse
in die 1te einzusetzen, um die Ordinate
$y_1, y_2 \cdots y_n$ durch die Werte von $y_0, \Delta y_0 \cdots \Delta^n$
auszudrücken. Es geschieht dieses durc
folgende Gleichungen:

$$y_0 = y_0$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y_0$$
$$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$$

- - - - - - - - -

$$y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \cdots + \Delta^n y_0.$$

Die Newton'sche Interpolationsformel lautet nun folgendermassen:

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{1}\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} + \cdots + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{1\cdot 2\cdots n}\frac{\Delta^n y_0}{\Delta x^n}$$

Wir haben zu zeigen, dass diese Formel wirklich den Namen einer Interpolationsformel verdient, d.h. dass für $x = x_0, x_1 \cdots x_n$ gerade $y = y_0\ y_1 \cdots y_n$ wird.
Nun sieht man, wenn man setzt:

$x = x_0$ so wird $y = y_0$

$x = x_1$ " " $y = y_0 + \frac{x_1-x_0}{1}\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = y_0 + \Delta y_0 = y_1$

$x = x_2$ " " $y = y_0 + \frac{x_2-x_0}{1}\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}{2\cdot 1}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2}$

$= y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 = y_2$

etc

Auch die Newton'sche Formel stellt eine Parabel nter Ordnung dar, ebenso wie die Lagrange'sche. Sie muss mit dieser

sogar identisch sein, da die zugehörigen Parabeln durch dieselben $n+1$ Punkte (x_i, y_i) hindurch gehen. Nur die Ordnung der Glieder ist eine andere.

Vergleichen wir diese Newton'sche Formel mit der Taylor'schen Entwicklung, so kommen wir zu einer ganz neuen Auffassung der letzteren.

Wir wollen nämlich die n äquidistanten Punkte auf den Punkt x_0 hinrücken lassen, indem wir Δx abnehmen und schliesslich $\Delta x = 0$ werden lassen. Dann gehen die Differenzenquotienten in die Differentialquotienten über und es wird die Newton'sche Interpolationsformel

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{1} y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2!} y_0'' + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} y_0^{(n)}$$

also gerade die $n+1$ ersten Glieder der Taylor'schen Reihe.

Die formale Bildungsweise der Newton'schen und der Taylor'schen Formel ist somit ganz dieselbe. Dagegen ist die eigentliche Bedeutung beider grundverschieden.

Während Newton interpoliert, extrapolirt Taylor, was gewagter ist, aber durch die Restbetrachtung erlaubt wird.

§18. Das Verfahren der partes proportionales. Es giebt noch eine weitere Beziehung zwischen der Newton'schen und der Taylor'schen Formel.

Man wendet die Newton'sche Formel vielfach an, um die in den Tafeln gegebenen Werte analytischer Functionen zu interpolieren. Man kann mit Hülfe der Taylor'schen Reihe die Genauigkeit dieses Verfahrens beurteilen. Dies soll hier nur an dem Beispiel der partes proportionales in den Logarithmentafeln dargethan werden.

Gegeben seien die Werte von $\log a$, $\log(a+1)$, $\log(a+2)$ - - - - - - Es sollen die dazwischen liegenden Werte von $\log x$ interpoliert werden.

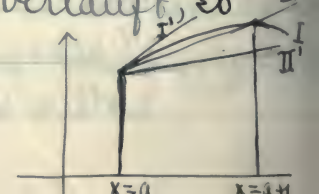
Da es uns nur auf das Prinzip ankommt, wollen wir die Newton'sche Formel bereits

bei dem Gliede mit $\frac{\Delta \log a}{\Delta a} = \log(a+1) - \log a$ abbrech
Geometrisch heisst dieses, dass wir eine Parabe
erster Ordnung an Stelle der wirklichen
Log. curve setzen, oder dass wir sie zwischen
a und a+1 durch ihre Sehne ersetzen.
Damit allein ist noch nichts gewonnen,
wenn man nicht auch den Fehler angi
den man im Maximum begehen kann.
Wir bezeichnen mit I die Gleichung
der Log-Curve, mit II die ihrer Sehne, also

I $\quad y = \log x$

II $\quad y = \log a + (x-a)\{\log(a+1) - \log a\}$

Nun können wir für den Zweck der
Fehlerabschätzung die Curven I und II
durch andere Curven I' und II' ersetzen.
Wir bemerken zunächst, dass I ganz
oberhalb II verläuft, solange $a < x < a+1$.
Nehmen wir nun eine Curve I' hinzu,
welche nach oberhalb von I und eine II',
die nach unterhalb von II verlauft, so
wird sicher
$I - II < I' - II'$ für $a < x < a+1$.



Wollen wir die Grenzen a und a+1 miteinbeziehen, so müssen wir schreiben

$$I - II \leqq I' - II' \quad \text{für } a \leqq x \leqq a+1.$$

Die Bedeutung des Taylor'schen Satzes für unsere Behauptung ist nun die, dass er uns mit Curven I' und II' versieht, deren Ordinaten sich leicht berechnen lassen. Nach dem Taylor'schen Satze können wir für I schreiben:

$$y = \log a + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''\{a + \Theta(x-a)\}.$$

Verstehen wir unter $\log a$ den in den Tafeln verzeichneten Zehner Log., so ist

$$f'(a) = \frac{M}{a} \qquad f''\{a+\Theta(x-a)\} = \frac{-M}{[a+\Theta(x-a)]^2}$$

wo M den Modul ($\ln = 0,434294\ldots$) bedeutet. Nehmen wir für Θ seinen grössten Wert $=1$, so erhält $f''\{a+\Theta(x-a)\}$ den grösstmöglichen Wert $-\frac{M}{x^2}$. Demnach wird die rechte Seite unserer Taylor'schen Formel vergrössert. Wir können also als I' die folgende Curve benutzen:

$$I' \quad y = \log a + \frac{x-a}{1} \cdot \frac{M}{a} - \frac{(x-a)^2}{2} \frac{M}{x^2}$$

Ich schreibe noch lieber

I' $y = \log a + \frac{x-a}{1} \frac{M}{a} - \frac{(x-a)^2}{2} \cdot \frac{M}{(a+1)^2}$

indem ich den Nenner x^2, durch den grösste
Wert $(a+1)^2$ ersetze, den er überhaupt annehm
kann.

Die Curve schliesst sich allerdings etwas
weniger genau an die log. Curve an,
ist aber für die Berechnung bequemer.
In der Function II kommt noch $\log(a+1)$
vor, das wir ersetzen wollen durch eine
kleinere Zahl, so dass II' entsteht und $II' \leqq II$.
Eine solche kleinere Zahl liefert uns wieder
die Taylor'sche Entwicklung des $\log x$.
Nehmen wir in dieser für Θ seinen kleinst
Wert $\Theta = 0$, so verkleinern wir die rechte Seite
wir haben also:

$$\log x \leqq \log a + \frac{x-a}{1} \frac{M}{a} - \frac{(x-a)^2}{2} \frac{M}{a^2}$$

woraus für $x = a+1$ folgt:

$$\log(a+1) \leqq \log a + \frac{M}{a} - \frac{M}{2a^2}$$

Θ anach erhalten wir aus II die neue

II' $y = \log a + (x-a)\left(\frac{M}{a} - \frac{M}{2a^2}\right)$

Die Einführung von Π' an Stelle von Π geschieht nur der einfacheren Rechnung wegen. Nun wird:

$$I' - \Pi'' = \frac{(x-a)M}{2a^2} - \frac{(x-a)^2 M}{2(a+1)^2}$$

oder wenn wir die rechte Seite ein wenig umschreiben:

$$I' - \Pi' = \frac{M}{2}\left\{\frac{x-a}{a^2} - \frac{(x-a)^2}{(a+1)^2} + \left(\frac{a+1}{2a^2}\right)^2 - \left(\frac{a+1}{2a^2}\right)^2\right\} = \frac{M}{2}\left\{\left(\frac{a+1}{2a}\right)^2 - \left(\frac{a+1}{2a^2} - \frac{x-a}{a+1}\right)^2\right\}$$

Sicher wird also

$$I' - \Pi'' < \frac{M}{2}\left(\frac{a+1}{2a^2}\right)^2 = \frac{M}{8a^2}\left(\frac{a+1}{a}\right)^2$$

Dieselbe Ungleichung gilt a fortiori für $I - \Pi$ d. h. für die Abrechnung von log Curve und Sehne.

Nun fragen wir, ob wir bei einer 7-stelligen Log-Tafel, wo bekanntlich die logg. für alle fünfstelligen Zahlen auf 7 Stellen genau angegeben sind, die logn der zwischenliegenden Zahlen mit den p. p. interpolieren dürfen, ohne dass der hierdurch entstehende Fehler die 7te Stelle beeinflusst.

Eine obere Grenze können wir für diesen Fehler auf Grund unserer letzten Formel sofort angeben. Wir haben für a eine

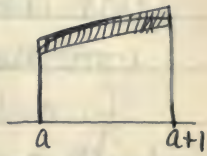
Zahl ≥ 10000 einzutragen, ferner mögen wir den nur wenig von 1 verschiedenen Bruch $\left(\frac{a+1}{a}\right)^2$ direct durch 1 ersetzen.
So finden wir als obere Grenze für den Fehler

$$\frac{m}{5} 10^{-8} < 0{,}04 \cdot 10^{-8} = 6 \cdot 10^{-10}$$

Der Fehler beträgt also noch keine Einheit in der 9ten Dezimale, daher ist die Interpolation nach der Newton'schen Formel für $n=1$ in unserem Falle gestattet.
Es kommt nun aber noch der Umstand hinzu, dass die aus den Tafeln selbst entnommenen Werte von $\log a$ und $\log(a+1)$ nur auf 7 Dezimalen genau sind. Beide sind daher mit einem Fehler behaftet, welcher innerhalb der Grenzen $\pm 5 \cdot 10^{-8}$ einen beliebigen Wert haben kann. Wir construierten bei der letzten Fig. eine Sehne, welche die Punkte

$$(x=a \quad y=\log a) \quad (x=a+1 \quad y=\log(a+1))$$

verbinden sollte. Auch diese ist also nicht völlig bestimmt. Wir können von ihr nur sagen, dass sie zwischen $x=a$ und $x=a+1$ innerhalb eines Parallelogramms verläuft

dessen vertikale Seiten die Länge 10^{-7} haben.
Genauer genommen hätten
wir statt der letzten Fig. diese → 

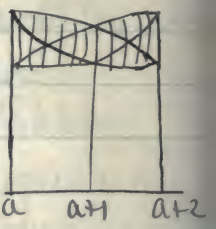
zeichnen sollen.
Wir sehen, dass die Ordinate der Sehne in jedem zwischen a und a+1 gelegenen Punkte gleichfalls möglicherweise die Ungenauigkeit von $\pm 5 \cdot 10^{-8}$ aufweist. Diese ist viel grösser, wie die oben abgeschätzte Ungenauigkeit, die aus der Anwendung der Newton'schen Interpolationsformel mit nur linearem Gliede entspringt. Wollten wir das Verfahren durch Hinzunahme der quadratischen Glieder verbessern, so könnten wir die letztgenannte Ungenauigkeit noch weiter verkleinern, dadurch würde aber die schwerwiegende erstgenannte Ungenauigkeit nicht verringert werden, sie würde im Gegenteil noch wachsen. Um so mehr Grund bei der linearen Interpolation stehen zu bleiben.

Es entstehen hier Fragen allgemeinerer Art über die zweckmässige Einrichtung von numerischen Tafeln irgend welcher Funktionen.

Man muss sich über folgende Punkte schlüssig werden:

1) Für welche Werte soll die vorgelegte Funktion tabuliert werden, oder anders ausgedrückt, wie dicht will man die im vorhergehenden mit $a, a+1, \ldots$ bezeichneten Abscissenwerte wählen?

2) Auf wie viele Dezimalen soll die Function für diese Abscissenwerte berechnet werden?



3) Wie genau kann man zwischen ihnen interpolieren und wie viele Glieder der Newton'schen Interpolationsformel hat man dabei anzuwenden?

Zwischen diesen Punkten besteht offenbar ein innerer Zusammenhang, in dem Sinne, dass, wenn man sich über 2 Punkte willkürlich schlüssig geworden ist, die Entscheidung über den dritten Punkt gegeben ist.

Capitel III

Contacte höherer Ordnung

§19. Noch einmal Schmiegungscurven incl. der Maxima-Minima.

Gegeben seien zwei Functionen f und φ. Wir nehmen an, dass beide sich an der Stelle $x = x_0$ nach dem Taylor'schen Satze entwickeln lassen und dass sich bei der Entwicklung die $(\nu+1)$ten Glieder als gleich herausstellen, während die $(\nu+2)$te Glieder, also die $(\nu+1)$te Diff. quotienten von f und φ verschieden sind. Wir sprechen dann von einem Contacte νter Ordnung zwischen den Curven f und φ. Die Frage soll sein: Wie liegen beide Curven in der Nähe von $x = x_0$ gegeneinander?

Es ist

1.) $f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots$

2.) $\varphi(x_0+h) = \varphi(x_0) + \frac{\varphi'(x_0)}{1}h + \frac{\varphi''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots$

Wir bilden:

$$f(x_0+h) - \varphi(x_0+h) = \frac{f_0^{(\nu+1)} - \varphi_0^{(\nu+1)}}{(\nu+1)!}h^{\nu+1} + \cdots$$

wobei wir die rechte Seite zur Abkürzung gleichsetzen:

3) $A h^{\nu+1} + B h^{\nu+2} + C h^{\nu+3} + \cdots = A h^{\nu+1} + h^{\nu+2}(B + C h + \cdots)$

Wir behaupten, dass sofern es uns nur auf die Werte dieser Reihe in der nächsten Nähe der Stelle $x = x_0$ ankommt, das erste Glied für den Wert der ganzen Reihe Ausschlag gebend ist.

Unserer Annahme nach convergieren nämlich die Reihen 1) und 2) mithin auch die Reihe 3) und ins Besondere der Bestandteil $B + C h + \cdots$ derselben, für genügend kleine Werte von h.

Es treffe dieses beispielsweise nach der positiven Seite hin zu für alle Werte $0 \leqq h \leqq h_1$. Dann hat jener Bestandteil für diese Werte von h immer einen endlichen Wert. Wir bezeichnen seinen grössten Wert in diesem Intervalle mit M_a, seinen kleinsten mit M_i und haben:

$$\left.\begin{aligned} \varphi - \varphi &< h^{\nu+1}(A + h M_a) \\ \varphi - \varphi &> h^{\nu+1}(A + h M_i) \end{aligned}\right\} \quad \text{für } 0 \leqq h \leqq h_1.$$

Nun können wir aber innerhalb des genannten Intervalles h immer so klein wählen, dass sowohl $h \cdot M_a$ wie $h \cdot M_i$ nur einen beliebig kleinen Bruchteil der Grösse A ausmacht. Mithin ist bewiesen, dass der Wert von $f - \varphi$ in unmittelbarer Umgebung des Punktes x_0 lediglich durch den ersten Term der Reihe 3) bestimmt wird. — Analog für negatives h.

Insbesondere hängt das Vorzeichen von $f - \varphi$ nur ab von dem Vorzeichen des Gliedes $A h^{\nu+1}$.

Wir haben 2 Fälle zu unterscheiden:

1) ν ungerade. Dann ist $h^{\nu+1}$ eine gerade Potenz von h, welche ihr Vorzeichen bekanntlich nicht ändert, wenn h von positiv zu negativ übergeht.

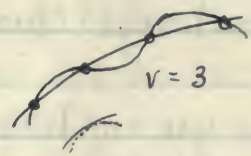
Da A eine Constante bedeutet, so hat auch $A h^{\nu+1}$ und ebenso $f - \varphi$ ein festes Vorzeichen.

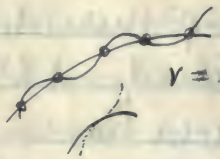
Es folgt: Bei einem Contakte ungerader Ordnung liegt die Curve f ganz oberhalb bez. ganz unterhalb

der Curve φ, je nachdem A das positive bez. negative Vorzeichen hat.

2) ν ist gerade. Dann ändert $A h^{\nu+1}$ und also auch $f-\varphi$ sein Vorzeichen mit h. Wenn die Curve f für $x < x_0$ oberhalb von φ liegt, so liegt sie für $x > x_0$ unterhalb von φ und umgekehrt.

Es folgt: Bei einem Contacte gerader Ordnung durchdringen sich die beiden Curven.





Wir wollen jetzt im Besonderen als φ-Curve die Schmiegungsparabel n^{ter} Ordnung von f im Punkte x_0 nehmen, womit wir die frühere Betrachtung dieser Curve wieder aufnehmen.

Dann haben wir:

$$\varphi(x_0+h) = f_0 + h f_0' + \frac{h^2}{2!} f_0'' + \cdots + \frac{h^n}{n!} f_0^{(n)}$$

$$f(x_0+h) = f_0 + h f_0' + \frac{h^2}{2!} f_0'' + \cdots + \frac{h^n}{n!} f_0^{(n)} + \cdots$$

Es könnte nun zufällig sein, dass $f_0^{(\mu+1)} = 0$; um uns ganz allgemein auszudrücken, wollen wir annehmen, dass

$$f_0^{(\mu+1)} = f_0^{(\mu+2)} = \cdots = f_0^{(\nu)} = 0,$$

und dass $f_0^{(\nu+1)}$, der erste auf $f_0^{(\mu)}$ folgende von Null verschiedene Diff. quotient ist. Dann wird einfach

$$f - \varphi = \frac{h^{\nu+1}}{\nu+1!} f_0^{(\nu+1)} + \frac{h^{\nu+2}}{\nu+2!} f_0^{(\nu+2)} + \cdots$$

Hier können wir, wie wir sehen, die Betrachtung auf das erste Glied beschränken. Wir schliessen wie oben:
Die Grundcurve f wird von der νten Schmiegungsparabel im Punkte x_0 durchsetzt, wenn ν eine gerade Zahl ist, sie liegt ganz oberhalb ihrer Schmiegungsparabel, wenn ν ungerade und $f_0^{(\nu+1)}$ positiv, sie liegt ganz unterhalb, wenn ν ungerade und $f_0^{(\nu+1)}$ negativ ist.
Da aber bedeutet $f_0^{(\nu+1)}$ den ersten auf $f_0^{(\mu)}$ folgenden Diff. quot., welcher von 0 verschieden ist.

Ein besonderes Interesse hat der einfachste Fall $u=1$. Es handelt sich hier um die Lage der Grundcurve zu ihrer Tangente. Dabei nehmen wir auch hier der Allgemeinheit wegen an dass

$$f_0'' = f_0''' = \cdots = f_0^{(\nu)} = 0 \quad f_0^{(\nu+1)} \neq 0.$$

Unser allgemeines Resultat können wir jetzt so ausdrücken:

Ist ν gerade, so durchdringen sich Curve und Tangente gegenseitig: die Curve hat einen Wendepunkt.

Ist ν ungerade, so liegt die Curve ganz auf der einen Seite der Tangente und zwar ist die Curve nach unten concav oder convex jenachdem $f_0^{(\nu+1)}$ negativ oder positiv ist.

Spezialisieren wir unser Resultat noch weiter, so kommen wir zu der Regel über Maxima und Minima der Funktionen. Wir wollen nämlich annehmen, es sei $f_0' = 0$, d.h. die Curve habe eine horizontale Tangente. Setzen wir ferner zuvorderst

der Einfachheit wegen voraus, dass $f_0''' \neq 0$ ist, so können wir dem vorhergehenden zufolge sagen:
Die Curve besitzt im Punkte $x = x_0$ ein Max. oder ein Min. oder keines von beiden, je nachdem

$$f_0'' < 0 \quad f_0'' > 0 \quad \text{oder} \quad f_0' = 0$$

ist.

$f_0'' > 0$, Min.

$f_0'' = 0$, Wendepunkt

$f_0'' < 0$, Max.

Lassen wir die Voraussetzung $f_0''' \neq 0$ fallen, so wird die Entscheidung etwas umständlicher:
Soll die Curve f im Punkte x_0 ein Max. oder Min. haben, so muss jedenfalls $f_0' = 0$ sein. Ausserdem aber muss der erste nicht verschwindende Diff. quot. von gerader Ordnung sein und zwar tritt ein Max. ein, wenn er negativ ist, ein Min., wenn er positiv ist.

§ 20. Kettenbrüche.

Bisher haben wir Schmiegungsparabeln construirt, d. h. ganze rationale Functionen. Man kann sich nun allgemein die Aufgabe stellen, Schmiegungshyperbeln zu construiren d. h. rationale gebrochene Functionen, welche sich in ähnlicher Weise möglichst gut anschliessen.

Eine rationale gebrochene Function von der νten Ordnung hat die Form:

$$\frac{a + b h + \cdots + \kappa h^{\nu}}{a' + b' h + \cdots + \kappa' h^{\nu}}$$

Hier haben wir Zähler und Nenner nach Potenzen der Grösse $h = x - x_0$ geordnet. Wir fragen uns, wie wir die Coefficienten dieser Functionen bestimmen werden. Im Ganzen kommen hier $2\nu+1$ willkürliche Constanten vor, nämlich die Verhältnisse der $2\nu+2$ Coefficienten $a, b \cdots \kappa, a', b' \cdots \kappa'$.

Dementsprechend können wir es so einrichten, dass unser Ausdruck mit

der gegebenen Function den Functionswert und die 2ν ersten Diff. quotienten an der Stelle $x = x_0$ gemein hat.

Wir verlangen also, dass die Gleichung

1) $a + bh + \cdots + kh^{\nu} = (a' + b'h + \cdots + k'h^{\nu})\left(f_0 + \frac{h}{1}f_0' + \frac{h^2}{2!}f_0'' + \cdots\right)$

richtig ist bis auf Glieder von der Ordnung $2\nu+1$.

Hier vergleichen wir die Coefficienten von $h^0, h^1, \cdots h^{2\nu}$ auf der rechten und linken Seite. Am einfachsten geht dieses bei den Potenzen $h^{\nu+1}, h^{\nu+2}, \cdots h^{2\nu}$, deren Coefficienten auf der linken Seite Null sind. So haben wir:

$h^{\nu+1}$ | $\frac{a' f_0^{(\nu+1)}}{\nu+1!} + \frac{b' f_0^{(\nu)}}{\nu!} + \cdots + \frac{k' f_0'}{1} = 0$

$h^{\nu+2}$ | $\frac{a' f_0^{(\nu+2)}}{\nu+2!} + \frac{b' f_0^{(\nu+1)}}{\nu+1!} + \cdots + \frac{k' f_0''}{2!} = 0$

$\cdots$ | $\cdots$

$h^{2\nu}$ | $\frac{a' f_0^{(2\nu)}}{2\nu!} + \frac{b' f_0^{(2\nu-1)}}{2\nu-1!} + \cdots + \frac{k' f_0^{(\nu)}}{\nu!} = 0$

Aus diesen ν linearen Gleichungen können die Verhältnisse der Coefficienten $a', b', \cdots k'$ des Nenners berechnet werden. Tragen wir ihre Werte in weitere $\nu+1$

Gleichungen ein, welche die Coefficienten von $h^0\ h'\ \dots\ h^\nu$ aus Gl. (1) liefern, so können wir aus ihnen die Coefficienten $a, b \dots k$ des Zählers finden.

Dieses allgemeine Verfahren soll in den einfachsten Fällen $\nu = 0, 1, 2$ durchgeführt werden.

1) Annäherungshyperbel 0ter Ordnung.

Ihre Gl. ist

$$y = \frac{a}{a'} = f_0.$$

Es ist eine horizontale Gerade, welche durch $(x_0\ y_0)$ hindurchgeht.

2) Annäherungshyperbel 1ter Ordnung.

Die $2\nu+1 = 3$ Gleichungen zur Coefficientenbestimmung sind die folgenden:

$$a = a' f_0 \qquad b = \frac{a'}{1} f_0' + b' f_0 \qquad 0 = \frac{a'}{2!} f_0'' + \frac{b'}{1} f_0'.$$

In Uebereinstimmung mit diesen Gleichungen dürfen wir nehmen:

$$a' = 2 f_0' \qquad b' = -f_0''$$

Dann folgt

$$a = 2 f_0 f_0' \qquad b = 2 f_0' - f_0 f_0''$$

also

$$y = \frac{2f_0 f_0' + (2f_0'^2 - f_0 f_0'')h}{2f_0 - f_0'' h}$$

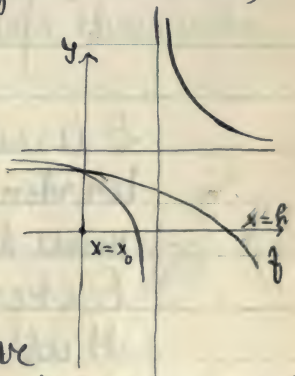
Diese Function wollen wir näher untersuchen, indem wir ihre geometrische Bedeutung construieren.

Dabei wollen wir aber die kürzere Bezeichnung

$$y = \frac{a+bh}{a'+b'h}$$

wieder aufnehmen.

Wir zeichnen uns die y-Axe durch den Punkt $x = x_0$ hindurch. Dann messen wir auf der x-Axe (eigentlich h-Axe) direct die Grösse h ab.



Unsere Curve besitzt zwei Asymptoten, eine verticale, deren Gleichung $a'+b'h=0$ ist und eine horizontale, für welche $y = \frac{b}{b'}$.

Unsere Schmiegungscurve ist eine gewöhnliche gleichseitige Hyperbel. Sie durchdringt die Grundcurve an der Stelle $x=x_0$ $y=y_0$ im Allgemeinen, weil sie einen Contact 2ter Ordnung mit ihr gemein hat.

3) Annäherungshyperbel 2ter Ordnung.
Sie stellt den Funktionswert und die ersten 4 Diff. quotienten von f im Punkte x_0 dar. Aus der Gleichung

$$a + bh + ch^2 = (a' + b'h + c'h^2)\left(f_0 + \frac{f'_0}{1}h + \frac{f''_0}{2!}h^2 + \cdots\right)$$

welche bis auf Glieder 4ter Ordnung inclusive in h richtig sein soll, ergeben sich zur Bestimmung der zwei Verhältnisse

$$a' : b' : c'$$

die Gleichungen

h^3 | $\frac{a'}{6}f'''_0 + \frac{b'}{2}f''_0 + \frac{c'}{1}f'_0 = 0$

h^4 | $\frac{a'}{24}f^{IV}_0 + \frac{b'}{6}f'''_0 + \frac{c'}{2}f''_0 = 0$ etc.

Dieses Verfahren wird bei grösseren Werten von v sehr unbequem; denn man muss die praktische Anwendung der Determinanten vermeiden.
Hier kommt noch der Uebelstand hinzu, dass wir für jede folgende Hyperbel eine ganz neue Rechnung beginnen müssen, ohne dass uns die Kenntnis der vorhergehenden Hyperbeln etwas nutzt.
Dem gegenüber werden wir sehen, dass

es noch einen anderen Weg gibt, dass man unsere rationalen Functionen durch eine gewisse „Kette" von Schritten successive aufbauen kann, nämlich durch Entwicklung von f in einen Kettenbruch.
Wir verfahren zu dem Zwecke folgendermassen: Wir haben:

$$f = f_0 + h f_0' + \frac{h^2}{2!} f_0'' + \cdots$$

und setzen:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) + \frac{h f''(0)}{2!} + \cdots = \frac{1}{f_1(h)}$$

Die Function $f_1(h)$ können wir ihrerseits nach Taylor entwickeln:

$$f_1(h) = f_1(0) + h f_1'(0) + \frac{h^2}{2!} f_1''(0) + \cdots$$

Jetzt bilden wir:

$$\frac{f_1(h) - f_1(0) - h f_1'(0)}{h^2} = \frac{f_1''(0)}{2!} + \frac{f_1'''(0)}{3!} + \cdots = \frac{1}{f_2(h)}$$

Für die Function $f_2(h)$ gelte die Entwicklung:

$$f_2(h) = f_2(0) + \frac{h f_2'(0)}{1} + \frac{h^2 f_2''(0)}{2!} + \frac{h^3 f_2'''(0)}{3!} + \cdots$$

Wiederum bilden wir:

$$\frac{f_2(h) - f_2(0) - h f_2'(0)}{h^2} = \frac{f_2''(0)}{2!} + \frac{h f_2'''(0)}{3!} + \cdots = \frac{1}{f_3(h)}$$

So fahren wir fort, indem wir jedesmal von der Function $f_n(h)$ die zwei ersten Glieder ihrer Potenzentwicklung abziehen. Die solcherweise definierten Functionen stehen offenbar in der Beziehung:

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{f_1(h)}$$

$$f_1(h) = f_1(0) + h f_1'(0) + \frac{h^2}{f_2(h)}$$

$$f_2(h) = f_2(0) + h f_2'(0) + \frac{h^2}{f_3(h)}$$

Aus dieser Kette von Gleichungen bekommen wir durch fortgesetzte Elimination die eine Gleichung:

$$f(h) = f(0) + \cfrac{h}{f_1(0) + h f_1'(0) + \cfrac{h^2}{f_2(0) + h f_2'(0) + \cfrac{h^2}{\cdots + \cfrac{h^2}{\cdots}}}}$$

welche man die Kettenbruchentwicklung von $f(h)$ nennt.

Diesen Kettenbruch wollen wir zerschneiden, indem wir den zuletzt stehenden Term $\frac{h^2}{f_n(h)}$ fortlassen. Dann bekommen wir nicht die Function $f(h)$ selbst, sondern eine

Annäherungsfunktion. Und zwar ergibt sich für:

$n = 1$	$f(0)$
$= 2$	$f(0) + \dfrac{h}{f_1(0) + h f_1'(0)}$
$= 3$	$f(0) + \dfrac{h}{f_1(0) + h f_1'(0) + \dfrac{h^2}{f_2(0) + h f_2'(0)}}$
etc	etc

Diese successiven Näherungsbrüche sind rationale Funktionen bez. von der Ordnung 0 1 2 3 .... wie man durch Heraufmultiplizieren der Nenner erkennt. Wir behaupten, es sind dies gerade die rationalen Schmiegungsfunktionen, welche wir suchen.

Zum Beweis haben wir zu zeigen, dass der νte dieser Näherungsbrüche bei der Entwicklung nach Potenzen von h bis zum Gliede νter Ordnung incl. mit $f(x)$ übereinstimmt.

Zunächst beweisen wir den Hülfsatz. Wenn zwei Potenzreihen

I $a + bh + ch^2 + \cdots\cdots$

II $a' + b'h + c'h^2 + \cdots\cdots$

bis zum ρten Gliede übereinstimmen, so stimmen auch die reciproken Werte derselben, welche wir gleichfalls als Potenzreihen in der Form:

$a_1 + b_1 h + c_1 h^2 + \cdots\cdots$

$a_1' + b_1' h + c_1' h^2 + \cdots\cdots$

anordnen, bis zum ρten Gliede übereinstimmen.
Für die Reihe I gilt die folgende Beziehung

$$1 = (a + bh + ch^2 + \cdots)(a_1 + b_1 h + c_1 h^2 + \cdots)$$

Durch Vergleichen der Potenzen von h auf der rechten und linken Seite ergeben sich die folgenden Gleichungen

$1 = a a_1$

$0 = a b_1 + b a_1$

$0 = a c_1 + b b_1 + c a_1$

$0 = \cdots\cdots$

Die Gleichungen können zur Berechnung der $a_1, b_1, c_1 \cdots$ dienen und zwar berechnet sich a_1 lediglich durch a; b_1 durch a und b; c_1 durch a, b und c; etc, die Berechnung der ersten ρ Coefficienten $a_1, b_1, c_1 \cdots\cdots$

hängt also lediglich von den ersten ρ Coefficienten $a, b, c \ldots\ldots$ ab.
Ganz dieselben Gleichungen erhalten wir auf demselben Wege aus der Reihe II zur Berechnung der Coefficienten $a_1', b_1' \ldots$ mittelst der Coefficienten $a', b' \ldots\ldots$.
Auch hier hängt die Berechnung der ersten ρ Coefficienten $a_1', b_1' \ldots$ nur von den ρ ersten Coefficienten $a', b' \ldots$ ab.
Da aber nach Voraussetzung die ρ Glen:

$$a = a' \quad b = b' \ldots\ldots$$

bestehen, so folgen daraus die Gleichungen

$$a_1 = a_1' \quad b_1 = b_1' \ldots\ldots$$

womit unser Hülfssatz bewiesen ist.
Zu unserem eigentlichen Zwecke übergehend, bemerken wir zunächst, dass die Annäherungsfunction n^{ter} Ordnung $f_n(x)$ mit der gegebenen Function $f(x)$ offenbar in dem Gliede n^{ter} Ordnung, d. h. in dem constanten Gliede übereinstimmt.
Um das Entsprechende allgemein zu beweisen, wollen wir vorübergehend

ein Zeichen einführen.
Es bedeute $(\tilde{\rho})$, dass die links und rechts von diesem Zeichen stehenden Ausdrücke bis zu den Gliedern ρter Ordnung in ihren Potenzentwicklungen übereinstimmen.
Wir sagen dann, die genannten Ausdrücke sind $(\rho+1)$-gliedrig angeordnet.
So schreiben wir:

$$f_0(0) + h f_0'(0) \;(\tilde{1})\; f_1(h)$$

und bei Anwendung unseres Hülfsatzes:

$$\frac{1}{f_0(0) + h f_0'(0)} \;(\tilde{1})\; \frac{1}{f_1(h)} = f'(0) + \frac{h}{2!} f''(0) + \cdots$$

mithin

$$\frac{h}{f_0(0) + h f_0'(0)} \;(\tilde{2})\; h f(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \cdots$$

und endlich:

$$f(0) + \frac{h}{f_0(0) + h f_0'(0)} \;(\tilde{2})\; f(0) + h f'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \cdots$$

Links steht die Annäherungsfunction 1ter Ordnung, rechts steht die gegebene Function $f(h)$ selbst. Wir können also sagen:
Die Function $f(h)$ stimmt mit der Annäherungsfunction 1ter Ordnung bis auf Glieder 2ter Ordnung incl. überein.

In derselben Weise zeigen wir durch fortgesetzte Anwendung unseres Hülfssatzes, die Richtigkeit unserer Behauptung für alle folgende Annäherungsbrüche. Somit haben wir gelernt, die rationalen Schmiegungsfunktionen, welche wir nämlich direct durch schwerfällige Determinanten ausdrückten, jetzt auf dem bequemeren Wege der Kettenbruchentwicklung rekurrent herzustellen. Die Kettenbruchentwicklung pflegt sonst erst in höheren Gebieten der Math., wo sie sehr wichtig ist, vorgetragen zu werden. In Wirklichkeit gehört sie aber gleich hinter dem Taylor'schen Satz, indem sich die Frage nach den rationalen Schmiegungsfunktionen aufs natürlichste an die Frage nach den ganzen rationalen Schmiegungsfunktionen anschliesst.

Capitel IV

Der Krümmungskreis

§ 21. Allgemeine Erörterungen, Ellipse:

An den Taylor'schen Satz schliesst sich auch die Theorie des Krümmungskreises an.

Vorbemerkung: In der Functionentheorie wird grundsätzlich zwischen der abhängigen und unabhängigen Variabeln unterschieden, also die eine bevorzugt. In der Functionentheorie legen wir daher ein sozusagen festes Coordinaten-System zu Grunde.

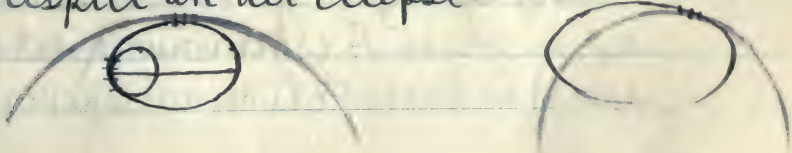
Daher thut man in der Functionentheorie recht, die Parabeln als die einfachsten Curven zu bevorzügen, weil sich bei ihnen die abhängige Variabeln besonders einfach durch die unabhängige ausdrückt.

In diesem Punkte ist aber die Geometrie freier: sie betrachtet die Curve an sich ohne Coordinatensystem (x und y sind hier gleichwertig). Daher ist in der Geometrie nächst der Gerade der Kreis die einfachste Curve und nicht die Parabel. Man müsste also auch vom geometrischen Standpunkte

aus die Krümmung nicht durch die Krümmungsparabel, sondern durch einen Krümmungskreis.
Die Gleichung des Kreises mit den Mittelpunktcoordinaten α, β und dem Radius ρ ist

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$$

wegen der 3 Constanten dürfen wir bestimmen, der Kreis soll eine gegebene Curve in 3 aufeinander folgenden Punkten schneiden (die Ordinate und die ersten beiden Diff. quotienten gemein haben).
Dem früheren entnehmen wir dann: Im Allgemeinen durchdringen sich Curve und Oscillationskreis. Eine Ausnahme tritt nur in solchen Punkten ein, wo Kreis und Curve zufälligerweise ausser den beiden ersten noch den dritten Diff. quotient gemein haben.
Beispiel an der Ellipse.



§22. Verschiedene Bestimmungsweisen.

Wir wollen uns jetzt analytisch die Gleichung des Krümmungsradius ableiten.

Aus der Gleichung des Kreises folgt:

1. $y-\beta = \pm\sqrt{\rho^2-(x-\alpha)^2}$ oder $y=\beta\pm\sqrt{\rho^2-(x-\alpha)^2}$

2. $y' = \mp\frac{x-\alpha}{\sqrt{\rho^2-(x-\alpha)^2}}$

3. $y'' = \mp\frac{\rho^2}{\left(\sqrt{\rho^2-(x-\alpha)^2}\right)^3}$

Wir verlangen, dass für diesen bestimmten Punkt x diese Grössen dem Werte der Ordinate und den Werten der beiden ersten Diff. quotienten der gegebenen Curve $y=f(x)$ gleich sind. Verstehen wir von jetzt an unter y, y', y'' eben diese Werte und unter x den bestimmten Punct, indem wir den Krümmungskreis construiren wollen, so sind uns die Gleichungen 1), 2), 3) gleichzeitig die Bedingungen zur Bestimmung von α, β, ρ. Diese Bestimmung ist ein ziemlich umständliches Eliminationsverfahren,

bei dem man nur mit Kunstgriffen durchkommt.

Wir bilden uns:

1') $$1 + y'^2 = \frac{\rho^2}{\rho^2 - (x-\alpha)^2}$$

2') $$(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pm \rho^3}{\{\rho^2 - (x-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

Dividieren wir diese Gleichungen rechts und links durch die rechte und linke Seite von Gleichung 3), so ergiebt sich:

4) $$\mp \rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Diese merkwürdige Formel bestimmt uns die Grösse des Krümmungsradius ρ. Da derselbe natürlich etwas positives sein soll, so müssen wir das obere oder untere Vorzeichen wählen, je nachdem y'' negativ oder positiv ist, je nachdem also die gegebene Curve nach unten ($y'' < 0$) oder nach oben ($y'' > 0$) concav ist. Andererseits wollen wir 1') durch 3) dividieren:

3') $$\frac{1 + y'^2}{y''} = \mp \sqrt{\rho^2 - (x-\alpha)^2} = \beta - y$$

oder

5) $$\beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

Endlich multiplizieren wir noch 3') mit 2

$$\frac{1+y'^2}{y''} y' = x - \alpha$$

oder

6) $$\alpha = x - \frac{1+y'^2}{y''} y'$$

Die Lage und Grösse des Krümmungs-kreises ist durch die Gleichungen 4, 5, 6 vollkommen bestimmt.
Dabei heisst der reciproke Wert des Krümmungsradius $\frac{1}{\rho}$ kurzweg „die Krümmung" an der betreffenden Stelle der Curve.

Es folgt hier eine geometrische Betrachtung der Krümmung wofür siehe Serret Chap. VII § 5, s. 195; sowie eine andere darauf bezügliche Ableitung derselben Formeln — siehe ebenda s. 196 und 198.

Abschnitt III

Erweiterungen der bisherigen Entwickelungen.

Capitel I

Singuläre Stellen der Funktionen.

§ 23. **Beispiele und Figuren.**

Wir haben uns früher viel mit der Frage beschäftigt, ob die Taylor'sche Reihe für eine gegebene Function statthaft ist, oder nicht.

Sicherlich ist sie dann unstatthaft, wenn die Function, oder einer ihrer Diff. quotienten gleich ∞ wird, oder wenn wir x_0 selbst ∞ gross wählen.

Denn an solchen Stellen verliert die Taylor'sche Formel jeden Sinn.

Wir nennen diese Stellen singuläre Stellen der Function.

Können wir aber vielleicht die Taylor'sche Formel so erweitern, dass sie auch für singuläre Stellen gilt?

Die gründliche Entscheidung dieser Frage gehört in die Functionentheorie.

Hier können wir nur einige Beispiele beibringen, wie das geschehen kann.

1. Nehmen wir

1. $y = x^{\frac{m}{n}}$

unter m und n ganze positive Zahlen ohne gemeinsamen Teiler verstanden. Dann wird

$$y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

$$y'' = \frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right) x^{\frac{m}{n}-2}$$

etc

In der Reihe der Diff. quotienten, die niemals abbricht, kommt schliesslich einmal ein negativer Exponent vor. Von da an werden die Diff. quotienten im Punkte $x=0$ unendlich gross. Dieselbe Erscheinung tritt bei jedem Gliede der folgenden Potenzreihe:

2. 2. $p\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \equiv a_0 + a_1 x^{\frac{1}{n}} + a_2 x^{\frac{2}{n}} + \cdots$

früher oder später auf.

Die Functionentheorie zeigt nun, dass eine Function y, deren Diff. quotienten für $x=0$ unendlich werden, wie die Functionen sich in eine Reihe

von der Form 2) in vielen Fällen entwickeln lässt.

2. Wir betrachten eine Function, die selbst ∞ wird: z. B

3) $$y = \frac{1}{x(a-x)}$$

also eine rationale Function.

Diese Function können wir für kleine Werte von x in folgender Weise entwickeln:

$$y = \frac{1}{ax}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-1} = \frac{1}{ax}\left(1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\cdots\right) = \frac{x^{-1}}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{x}{a^3}+\cdots$$

Wegen der Unendlichkeitsstelle bei $x=0$ tritt in der Potenzreihe ein Glied mit negativem Exponenten auf. In der Functionentheorie wird gezeigt, dass im Allgemeinen, negative Exponenten auftreten, wenn die zu entwickelnde Function sich wie die Function 3) oder allgemeiner wie eine rationale Function verhält.

Der Reihentypus, auf den man da kommt, ist dieser:

4) $$\frac{a_\nu}{x^\nu}+\frac{a_{\nu-1}}{x^{\nu-1}}+\cdots+\frac{a_1}{x}+C+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\cdots$$

3. Die Möglichkeiten 1 und 2 können auch in Combination treten, d. h. man gebraucht unter Umständen auch solche Reihen:

$$\frac{a_r}{x^{\frac{r}{n}}} + \frac{a_{r-1}}{x^{\frac{r-1}{n}}} + \cdots\cdots + C + \beta_1 x^{\frac{1}{n}} + \beta_2 x^{\frac{2}{n}} + \cdots\cdot$$

4. Im Punkte $x_0 = \infty$ können Reihen, die nach Potenzen von $x - x_0$ fortschreiten, sicher nicht gebraucht werden. Man hilft sich dann so, dass man setzt: $x = \frac{1}{t}$, sodass dem Werte $t = 0$ der Wert $x = \infty$ entspricht.

Schreibt man $f(x) = f(\frac{1}{t}) = \varphi(t)$ so kann man unter Umständen $\varphi(t)$ in eine Reihe entwickeln, die nach (ganzen oder gebrochenen) Potenzen von t d. h. von $\frac{1}{x}$ fortschreiten; unter den Exponenten von t können auch einige negativ sein. So wird etwa:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x(x-a)}} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a}{x}}} = \frac{1}{x}\left(1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{a}{x} + \tfrac{3}{8}\left(\tfrac{a}{x}\right)^2 + \cdots\cdot\right)$$

Alle diese Möglichkeiten wollen wir noch durch Figuren erläutern, die

sich selbst wieder nur auf speziell herausgegriffene Beispiele beziehen.
Ad. 1 Wir betrachten den folgenden Fall der allgemeinen Reihe 2):

$$y = x^{\frac{1}{2}} + a x^{\frac{2}{2}} + b x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

In der Nähe des Punktes $x=0$ wird die Curve mit hinreichender Genauigkeit durch das erste Glied dargestellt. Das gibt

$$y^2 = x$$

Die Curve verhält sich wie eine Parabel mit verticaler Scheiteltangente

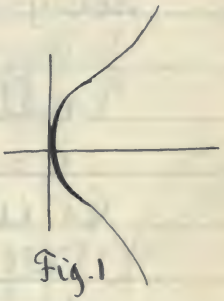


Fig. 1

Ein anderer Fall der Reihe 2) ist der folgende:

$$y = x^{\frac{3}{2}} + a x^{\frac{4}{2}} + \dots$$

In erster Annäherung wird bei $x=0$

$$y^2 = x^3, \quad y' = \tfrac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}, \quad y'' = \tfrac{3}{4} x^{-\frac{1}{2}}$$

Die Curve existiert nur für positive Werte von x, ein Teil verläuft oberhalb, ein Teil unterhalb der x-Axe.

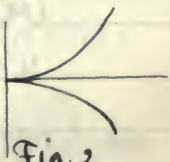


Fig. 2
Horizontale Spitze

Die Tangente in $x=0$ geht horizontal, die Krümmung ist unendlich.
Ferner sei:

$$y = x^{\frac{1}{3}} + ax^{\frac{2}{3}} + \dots$$

In der Nähe des Nullpunktes wird

$$y' = x,$$

die Curve hat eine mit der y-axe zusammenfallende Wendetangente.

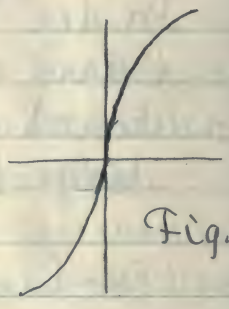


Fig. 3

Endlich sei:

$$y = x^{\frac{2}{3}} + ax^{\frac{3}{3}} + \dots$$

Es ist dieser derselbe Fall wie in Fig. 2, nur dass die y- und die x-axe vertauscht sind.

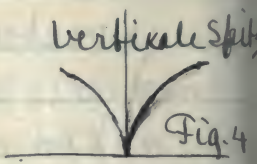


Fig. 4

Ad. 2 Die Curve

$$y = \frac{1}{x} + a + bx + \dots$$

verhält sich in der Nähe des Nullpunkte wie die Hyperbel

$$y = \frac{1}{x}$$

hat also eine verticale Asymptote.

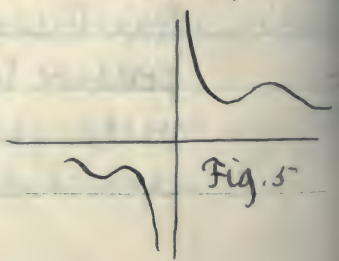


Fig. 5

In einiger Entfernung vom Nullpunkte, wo die Glieder $a+bx+\dots$ Einfluss gewinnen, kann sie aber ganz anders verlaufen.

Ad 4. In der Nähe des Punktes $x_0=\infty$ möge folgende Entwicklung gelten:

$$y = ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}+\dots\dots$$

Da betrachten wir vor Allem die gerade Linie $y=ax+b$. Die wirklichen Ordinaten der Curve weichen von den Ordinaten dieser Geraden ab nur um Grössen, die mit wachsendem x verschwinden, nämlich um $\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}+\dots$

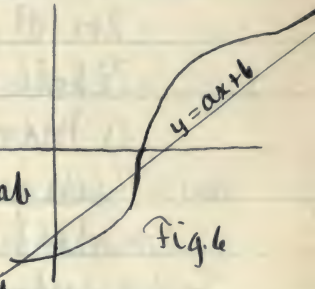


Fig. 6

Die Curve nähert sich daher dieser Geraden mit wachsendem x immer mehr. Sie hat eine nicht vertikale Asymptote.

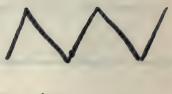
Mit diesen erweiterten Reihen sind wir in der Lage, eine <u>Revision der Theorie der Max. und Min.</u> eintreten zu lassen.

Unser früheres Kriterium, welches sich auf reguläre Stellen analytischer Funktionen bezog, können wir am anschaulichsten so schreiben:

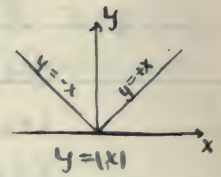
1) $f'=0$ $\begin{cases} f''<0 & \text{Ma.} \\ f''=0 & \longrightarrow \\ f''>0 & \text{Mi} \end{cases}$ $\begin{cases} f'''<0 & \text{x} \\ f'''=0 & \longrightarrow \\ f'''>0 & \text{x} \end{cases}$ $\begin{cases} f^{IV}<0 & \text{Ma.} \\ f^{IV}=0 & \longrightarrow \\ f^{IV}>0 & \text{Mi.} \end{cases}$ etc

wo x weder Max. noch Min. bedeutet.
In Bezug auf Ma und Mi. an singulären Stellen fügen wir nun noch hinzu:
2) Man untersucht die sämtlichen singulären Stellen, indem man die dort etwa stattfindenden Reihenentwicklungen heranzieht.
Es gibt aber auch sogenannte willkürliche Funktionen, die keinem analytischen Gesetz der bislang betrachteten Art gehorchen.
Bei ihnen greift weder das Criterium 1 noch 2. Da heisst dann die einzige Regel: Man betrachte die Curve und gebrauche seinen gesunden Menschenverstand

Beispielsweise sieht es jeder der Zickzack ? linie an, wo sie ihre Maxima hat



Ebenso, dass $y = |x|$ in $x=0$ ein Minimum besitzt.



§ 24. Die unbestimmten Formen der Analysis

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, etc

In Lehrbüchern heisst es „ . . . . .
man bestimme dann den wahren Wert dadurch dass . . . . . .
Das ist nicht richtig, denn die Form $\frac{0}{0}$ ist wirklich völlig unbestimmt; einen wahren Wert giebt es nicht; wohl aber soll der nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ergebende Wert d.h. im Sinne verstanden werden für den der Form $\frac{0}{0}$ etc zukommenden Wert. $x=1_0$

Die Behandlung geschieht wie bei Stegemann und bei Serret.

Capitel II

Neue geometrische Anwendungen.

§25. Parameterdarstellung ebener Curven.

Die Parameterdarstellung kommt immer in der Mechanik vor, wo dann x, y den Ort eines beweglichen Punktes zur Zeit t bedeutet. Die Diff. quotienten haben dabei ihre charakteristische Benennungen; es heissen nämlich:

$\varphi'(t), \psi'(t)$ die Componenten der Geschwindigkeit nach der x bez. y-Axe.

$\varphi''(t), \psi''(t)$ die Componente der Beschleunigung in der Richtung der x bez y-Axe

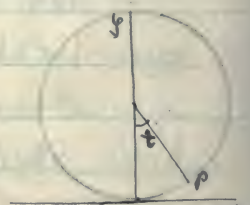
In der reinen Mathematik ist diese Darstellungsweise auch sehr nutzlich.

Es folgen hier einige Beispiele von denen dieses das letzte ist:

Gleichung des Kreises:

$$x = r \sin t, \quad y = r - r \cos t$$

Die Gestalt der Curve wird offenbar nicht geändert,

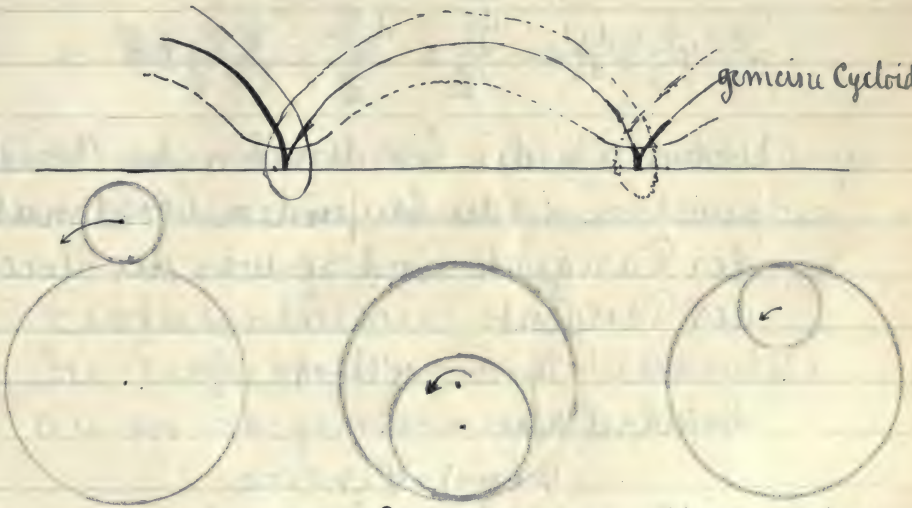


wenn wir statt t einen neuen Parameter τ einführen, wobei wir t = irgend einer Funktion von τ setzen z. B. $t = \frac{\tau}{r}$.
Wir können die Gleichung des Kreises also auch so schreiben:

$$x = r \sin \frac{\tau}{r} \qquad y = r - r \cos \frac{\tau}{r}$$

was für die Folge bequem sein wird.

§ 26. Excurs über die Cycloiden



Epicycloide Pericycloide Hypocycloide

Es werden die Gleichungen aller 12 Cycloiden abgeleitet (Parameterdarstellung), wie sie in jedem besseren Lehrbuch zu finden sind.

Zum Schlusse dieses Paragraphen kehren wir zur Parameterdarstellung zurück: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Wir wollen in dieser die Gleichung der Tangente, die Grösse des Krümmungsradius etc. berechnen. Um unsere früheren Formeln übertragen zu können, müssen wir y' y'' durch φ und ψ ausdrücken. Wir haben:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'}{\varphi'}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d\frac{\psi'}{\varphi'}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\varphi'^3}.$$

Wenn x, y die Coordinaten des Berührungspunktes, $\alpha\beta$ die laufenden Coordinaten der Tangente sind so war die Gleichung der Tangente

$$y - \beta = y'(x - \alpha)$$

Es wird also:

$$\psi'(x-\alpha) - \varphi'(y-\beta) = 0$$

Die Gleichung der Normale war

$$y'(y-\beta) + (x-\alpha) = 0$$

sie wird

$$\varphi'(x-\alpha) + \psi'(y-\beta) = 0$$

Das Bogenelement $ds = \sqrt{1+y'^2}\cdot dx$ wird

$$ds = \sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\,dt$$

Der Contingenzwinkel lautete

$$dw = \frac{y''\,dx}{1+y'^2}$$

und wird

$$dw = \frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\varphi'^2+\psi'^2}\,dt$$

Der Krümmungsradius etc. werden:

$$\rho = \frac{(\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}$$

$$\alpha = \varphi - \psi'\frac{\varphi'^2+\psi'^2}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''} \qquad \beta = \psi + \varphi'\frac{\varphi'^2+\psi'^2}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}$$

Alle diese Formeln sind nicht kürzer als die früheren, aber symmetrischer.

§27 Evolutentheorie.

Die Evolutentheorie ist behandelt wie in Stegemann-Kiepert §90.

Man kann die Evolute immer so realisieren, dass man die Zeichenebene mit Streusand bedeckt, und ein Lineal längs der Grundcurve senkrecht zu

dieser führt. Das Lineal schiebt den Streusand zur Seite. Die Grenze zwischen dem mit Streusand bedeckten und dem freien Gebiete der Ebene ist die Curve der Krümmungscentra.

Wenn man einen Faden an einer Curve aufwickelt, so beschreibt der Endpunkt des Fadens eine Curve, deren Krümmungsradius in jedem Punkte durch das zugehörige gespannte Stück des Fadens vorgestellt wird.

Als Beispiele folgen

1) Die Ellipse siehe Stegemann Kiepert §91, II
2) " Cycloide " " " " V

---

§28 Polarcoordinaten. Logarithmische Spirale.

Wie bekannt ist

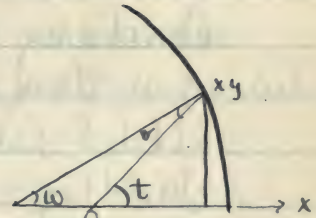
$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t$$

Durch die Gleichung $r = f(t)$ ist offenbar eine Curve bestimmt. Für diese erhalten wir die spezielle Parameterdarstellung:

$$x = f(t)\cos t = \varphi(t), \quad y = f(t)\sin t = \psi(t)$$

Bemerkenswert ist der Ausdruck für $\operatorname{tg} \nu$ — (ν der Winkel des Radiusvectors gegen die Normale) —.

Nach der Fig. ist $\nu = t - \omega$



also

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\operatorname{tg} t - \operatorname{tg} \omega}{1 + \operatorname{tg} t \operatorname{tg} \omega}$$

In Polarcoordinaten wird

$$\operatorname{tg} \omega = -\frac{\varphi'}{\psi'} = \frac{r' \cos t - r \sin t}{r' \sin t + r \cos t}, \quad (r' = \tfrac{dr}{dt})$$

Trägt man dieses ein, so wird:

1) $$\operatorname{tg} \nu = \frac{r'}{r}.$$

Ferner berechnet man den Ausdruck des Krümmungsradius

2) $$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - r \cdot r''}$$

Beispiel: logarithmische Spirale:

$$r = e^{kt} \quad \text{oder} \quad t = \tfrac{1}{k} \log r$$

Daher

$$r' = k e^{kt}, \quad r'' = k^2 e^{kt}$$

so sind nach Gl^en 1) und 2)

3) $$\operatorname{tg} \nu = k, \quad \rho = \sqrt{1 + k^2} \cdot r.$$

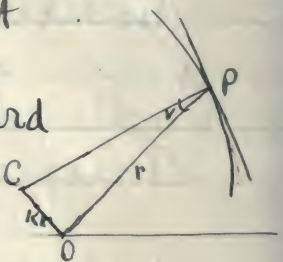
Bei der log. Spirale ist also ν eine Constante und der Krümmungsradius ρ ist dem Radiusvector r proportional. Aus der Constanz von ν folgt, dass auch der Winkel $\frac{\pi}{2} - \nu$, den der Radiusvector mit der Tangente bildet eine Constante ist.

Die log. Spirale schneidet also alle von O ausgehenden Strahlen unter einem constanten Winkel, sie ist, wie man sagt, eine isogonale Trajectorie des Strahlenbüschels O.

An die Formel 3) knüpft folgende Construction an:

Wir tragen in O senkrecht zu $OP = r$ die Strecke $OC = \kappa r$ ab und ziehen CP, dann wird

$$\frac{CO}{OP} = \kappa = \operatorname{tg} \sphericalangle CPO = \operatorname{tg} \nu$$



$$CP = \sqrt{CO^2 + OP^2} = \sqrt{1+\kappa^2} \cdot r = \rho .$$

Unser rechtwinkliges Dreieck COP liefert uns also durch die Richtung seiner Hypotenuse die Normale, durch die Länge derselben den Krümmungsradius und

durch den Eckpunkt C das Krümmungscentrum der log. Spirale.

Schliesslich berechnen wir noch die Evolute unserer Curve. Es seien R und T die Polarcoordinaten des Punktes C der Evolute:

$$R = \kappa r \qquad T = t + \frac{\pi}{2}$$

Aus der Gleichung $r = e^{\kappa t}$ ergiebt sich

$$R = \kappa e^{\kappa\left(T - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{\kappa\left(T - \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\kappa}\log\kappa\right]\right)}$$

Die Evolute der log. Spirale ist also wieder eine log. Spirale (cf Cycloide), welche sich aus der ursprünglichen Spirale ergiebt, wenn wir sie um den Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\kappa}\log\kappa$ drehen.

Der Entdecker des schönen Satzes ist Jacob Bernoulli. Die Worte, die er auf seinen Grabstein setzen liess:

„Eterum renata resurgo":

beziehen sich auf die log. Spirale.

§ 29 Implicite Curvendarstellung.

Bisher betrachteten wir nur Curven, deren Gleichungen in der expliciten

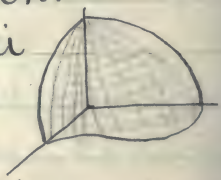
Form gegeben waren: $y = f(x)$,
d.h. eigentlich Functionen einer Veränderlichen
vielfach ist es jedoch bedeutend zweckmässiger die implicite Form

$$F(x,y) = 0$$

anzuwenden.
Bei der Untersuchung dieser, treten wir nicht aus dem Gebiete der Functionentheorie heraus, sondern wir kommen nur in das Gebiet zweier (willkürlichen) Variablen hinein.
Wollen wir nämlich die Gesammtheit der Werte überblicken, welche $F(x,y)$ annehmen kann, so werden wir

$$z = F(x,y)$$

setzen und werden diese Function als eine Fläche im Raume deuten.
Die Curve $F(x,y)=0$ ist dabei die Spur dieser Fläche in der xy-Ebene.



Insofern leitet die Betrachtung der impliciten Gleichung $F(x,y)=0$ bereits in das Gebiet der Functionen zweier

veränderlichen, welches direkt erst im nächsten Capitel behandelt werden kann. Wir entnehmen bereits hier daraus den Begriff der particellen Diff. quotienten.
Die Function $F(x,y)$ ändert sich sowohl wenn man x, als wenn man y ändert. Wir haben daher jetzt zwei sogenannte particelle Diff. quotienten zu betrachten:

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Hier benutzt man nach Jacobi statt der „d" die runden „∂".
Die korrekte Schreibweise würde eigentlich sein

$$\frac{d_x F}{dx} \qquad \frac{d_y F}{dy}$$

d.h. man soll den Quotienten bilden, aus der Aenderung $d_x F$ von F bei Aenderung von x, und der Aenderung dx von x.
Schreiben wir dann die Gleichung

$$dF = d_x F + d_y F$$

so gibt diese den richtigen Sinn, dass sich die Gesamtänderung von F additiv zusammensetzt aus den Aenderungen, welche einer blossen Aenderung des x und des y einzeln entsprechen.
Diese Schreibweise hat sich aber nicht eingebürgert.
Aus jeder der Funktionen $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ entstehen wieder zwei neue Diff. quotienten, die sogenannten zweiten partiellen Diff. quotienten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad | \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

Dabei wollen wir vorläufig annehmen, dass

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

ist, was weiter unten genauer behandelt werden wird.
Wir berechnen nun die Fortschreitungsrichtung $\frac{dy}{dx}$ auf einer Curve $F(x,y) = 0$, die wir als Spur der Fläche $z = F(x,y)$ in der x,y-Ebene auffassen, durch die partiellen Diff. quotienten.

Allgemein werden wir haben

$$z+dz = f(x\,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

Da aber längs unserer Curve sowohl z als $dz = 0$ ist, so erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Wir berechnen auch noch die zweiten totalen Diff. quotienten durch die zweiten partiellen Diff. quotienten Wir haben

$$\frac{d^2y}{dx^2} = d\,\frac{dy}{dx}$$

Denken wir uns $\frac{dy}{dx}$ nach der vorhergehenden Gleichung durch $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ ausgedrückt, so wird $\frac{dy}{dx}$ eine Function von x und y. Die Aenderung $d\,\frac{dy}{dx}$ zerlegt sich daher in je eine partielle Aenderung nach x und nach y. Wir bekommen also:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial \frac{dy}{dx}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{dy}{dx}}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}\cdot\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$$= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\cdot\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} = \frac{D}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}$$

Die Determinante D entsteht dadurch, dass man die in gewisser Weise neben einander geschriebenen zweiten Diff. quotienten mit den ersten Diff. quotienten „rändert". Die Gleichung der Tangente an die Curve $F(x\,y) = 0$ im Punkte $x_0 y_0$ nimmt nun folgende Form an:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)(y - y_0) = 0$$

Das Zeichen $(\ )_0$ bedeutet dabei, dass das eingeklammerte für die Werte $x_0 y_0$ zu bilden ist. Der Krümmungsradius wird:

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{D}$$

etc.

Die neuen Formeln sind wieder etwas länger aber dafür symmetrischer.

Berechnen wir hiernach Tangente und Krümmungsradius der Ellipse.

$$F \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Hier werden die ersten Diff. quotienten $\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}$

" 2 ten " " $\frac{2}{a^2}, 0, 0, \frac{2}{b^2}$

Daher wird die Gl. der Tangente

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$$

oder

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

da $x_0 y_0$ ein Punkt der Ellipse ist.
Der Krümmungsradius ist einfach:

$$\rho = \frac{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}^3}{a^4 b^4}$$

§ 30. Theorie der singulären Punkte.
Dagegen liefert uns die implicite Darstellung hinsichtlich der singulären Punkte ganz etwas neues. Hier kommt die wahre Natur der singulären Punkte zum Ausdruck, während bei der expliciten Darstellung zum Teil nicht singuläre Punkte singulär erscheinen,

zum Teil wirkliche Singularitäten verborgen bleiben. Zwei Beispiele werden dieses erläutern.

1) Ellipse: Ihre explicite Gleichung $y = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ liefert für $x = \pm a$: $y' = 0$, $y'' = 0$, also scheinbar einen singulären Punkt, was durchaus nicht stattfindet, ebenso wenig wie bei der impliciten Darstellung, in welcher $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ wird.

2) Lemniskate: Ihre Gleichung schreibt sich am einfachsten in Polarcoordinaten:

$$r^2 = \cos 2t,$$

woraus als implicite Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten folgt:

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$$

Löst man nach y^2 auf, so wird:

$$y^2 = \frac{-1-2x^2 \pm \sqrt{1+8x^2}}{2}$$

Das negative Zeichen von der Wurzel brauchen wir nicht zu berücksichtigen, das es nur imaginäre Werte für y liefert. Wiederum erscheint hier $x = \pm 1$ als singulärer Punkt, weil dort $y' = \infty$ wird, während in der

Fig. dieser Punkt sich als ganz gewöhnlicher Curvenpunkt erweist. Vielmehr besitzt die Curve eine wirkliche Singularität nur im Punkte $x=0, y=0$ wo sie einen Doppelpunkt hat. Dieser kommt aber in der expliciten Gleichung nicht zur Geltung. In der That bleiben hier alle Diff. quotienten von y stetig. Der Grund liegt darin, dass wir durch Ausrechnung von y die Lemniskate künstlich in zwei Äste zerlegt haben $y = +\sqrt{\quad}$ $y = -\sqrt{\quad}$, sodass wir an einem einzelnen derselben den Doppelpunkt nicht constatieren können.

Anders ist es bei der impliciten Gleichung. Wir wollen das Criterium sogleich an der allgemeinen Gleichung $F(x,y)=0$ entwickeln. (x,y) sei ein fester Punkt, h und k Zuwächse von x und y beliebig klein. Dann bedeutet $x+h, y+k$ einen in der Nähe von x, y gelegenen Punkt. Wir denken uns nun $F(x+h, y+k)$ nach Potenzen von h und k geordnet. Es ergiebt sich:

$$F(x+h, y+k) = F(x,y) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}h + \frac{\partial F}{\partial y}k\right)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}k^2\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}h^3 + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}h^2k + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}hk^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}\right.$$

$$+ \quad \cdot \quad \cdot \quad - \quad - \quad - \quad - \quad \cdot$$

$$= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \quad \cdot \quad - \quad - \quad - \quad -$$

Damit anticipieren wir allerdings schon den Taylor'schen Satz für zwei Variable, dessen Gültigkeit erst im nächsten Capitel untersucht werden kann. Das hat aber hier nichts bedenkliches, weil die Entwicklung eines Polynoms $F(x,y)$ immer durch wiederholte Anwendung des binomischen Lehrsatzes bewerkstelligt werden kann, die dann aber zu unserer Formel hinführt.
Nun sei x,y ein Curvenpunkt; dann ist $u_0 = 0$. Denken wir uns h und k genügend klein, so wird in der Nähe von x,y die Function in erster Annäherung dargestellt durch die Gleichung $u_1 = 0$. Aus dieser Gleichung ergiebt sich ein ganz bestimmter Werth für $h:k$ d.h. für die Fortschreitungsrichtung der Curv

Anders wenn u_1 für alle Werte von h und k verschwindet, wenn $u_1 \equiv 0$. Dann sagt uns die Bedingung $u_1 = 0$ garnichts über die Fortschreitungsrichtung aus und wir müssen, um eine angenäherte Darstellung von $F(x,y) = 0$ zu erhalten, die Glieder zweiter Ordnung gleich 0 setzen: $u_2 = 0$. Diese Gleichung liefert zwei Werte für $h : k$, also zwei Fortschreitungsrichtungen. Wenn auch $u_2 \equiv 0$, so müssen wir bis zu Gliedern 3ter Ordnung gehen. Wir kommen daher zu folgender Tabelle:

Wenn	Sei $F(x,y) = 0$ in erster Annäherung gegeben durch:	Dann haben wir einen
$u_1 \not\equiv 0$	$u_1 = 0$	gewöhnlichen Pkt.
$u_1 \equiv 0$ $u_2 \not\equiv 0$	$u_2 = 0$	Doppelpunkt
$u_1 \equiv 0$ $u_2 \equiv 0$ $u_3 \not\equiv 0$	$u_3 = 0$	Dreifachen punkt
- - - -	- - - - - -	- - - - -

Das Kriterium für einen gewöhnlichen Punkt ist also $u_1 \not\equiv 0$ und die angenäherte Darstellung von $F(x,y) = 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} k = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer geraden Linie und zwar genau die Gleichung der Tangente.

Das Kriterium für einen Doppelpunkt lautet: $u_1 \equiv 0$, $u_2 \not\equiv 0$, d. h. im Doppelpunkt ist:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

während die zweite Diff. quotienten nicht sämtlich verschwinden.

Die Curve wird hier in erster Annäherung gegeben durch die Gleichung $u_2 = 0$ oder

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} k^2 = 0$$

Diese Gl. liefert zwei Werte für $h:k$, also zwei Fortschreitungsrichtungen, oder ein Tangentenpaar. Die Ausrechnung der quadratischen Gl. für $h:k$ gibt:

$$\frac{h}{k} = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}$$

Wir unterscheiden 3 Fälle:

Wenn die Quadratwurzel ist

reell, so sind 2 reelle Fortschreitungsricht.; eigentlich. Dop. pkt. ✕

null " " 2 zusammenfallende " ; Spitze <

imaginär " " 2 imaginäre " ; isolirter Pkt.

Daraufhin prüfen wir die Gl. der Lemniskate:

$$F(x,y) \equiv (x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2) = 0$$

Im Punkte $x=0$, $y=0$ wird

$$F(x+h, y+k) = (h^2+k^2)^2 - (h^2-k^2)$$

Es ist dann

$$0 = x + (k^2-h^2) + x + (k^2+h^2)^2$$

Wie wir sehen ist $u_1 \equiv 0$ $u_2 \not\equiv 0$.

Die Lemniskate hat also im Anfangspunkte einen Doppelpunkt. Die Gleichung $k^2-h^2=0$ liefert die beiden reellen Wurzeln: $\frac{h}{k} = \pm 1$. Wir haben also einen eigentlichen Doppelpunkt, dessen Äste unter 45° gegen die Coordinatenaxen geneigt sind.

Abschnitt IV.

Functionen zweier Variablen.

Capitel I

Grundlegung

§ 31. Einfachste Beispiele.

Eine Function $z = f(x\,y)$ kann in jedem Falle durch eine Fläche repräsentiert werden.

Unter den rechnerisch definierten Functionen sind die einfachsten die Paraboloide.

Darunter fällt z. B. die Gl. der Ebene

$$z = \alpha x + \beta y$$

auch die Gl. des gewöhnlichen Paraboloids

$$z = ax^2 + bxy + cy^2$$

Je nachdem diese Gl. sich durch geeignete Wahl der Coordinatenaxen in eine der folgenden 3 Normalformen bringen lässt, unterscheidet man die folgenden 3 Typen:

elliptisches Paraboloid: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

hyperbolisches " : $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

parabolisches Cylinder: $z = \frac{x^2}{a^2}$.

§32. Partielle Differentialquotienten nebst dem Satze $s = s'$.

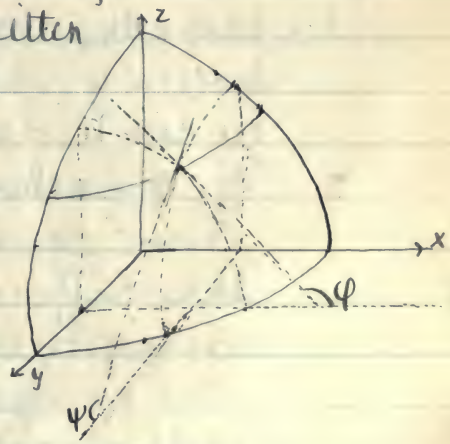
Die ersten Diff. quotienten:

Wir wollen uns nun die Bedeutung der Diff quotienten

$$p = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

klar machen.

Wenn wir p bilden, betrachten wir y als constant, d.h. wir betrachten die Veränderung von z längs einer Curve, welche durch die Ebene $y = \text{const.}$ aus der Fläche ausgeschnitten wird. Construieren wir die Tangente an diese Curve, und bringen sie zum Schnitt mit der xy-Ebene, so wird nach früherem $\operatorname{tg} \varphi = p$, wo φ derjenige Winkel ist, welchen die Tangente mit der x Axe bildet. Ebenso wird $\operatorname{tg} \psi = q$, wo ψ den Winkel bedeutet, welchen die in



der Ebene $x = \text{const.}$ verlaufende Flächentangente mit der y-Axe bildet.
Gehen wir nicht gerade in der Richtung $dy = 0$ bez. $dx = 0$, sondern in einer mittleren Richtung auf der Fläche vorwärts, so ist der Zuwachs von z gegeben durch

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Soll z während der Bewegung garnicht wachsen, d.h. sollen wir uns auf einer Niveaucurve bewegen, so müssen wir es so einrichten, dass in jedem Augenblick $p\,dx + q\,dy = 0$ oder $\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q}$ ist.
Wollen wir andererseits immer rechtwinklig zu den Niveaulinien gehen, so müssen wir $\frac{dy}{dx} = \frac{q}{p}$ machen. Man nennt die entstehende Curve die <u>Curve stärksten Falles</u>.
Ihre Differentialgleichung, so können wir sagen, ist

$$q\,dx - p\,dy = 0.$$

Wollen wir noch zusehen, wie rasch wir auf einer Fallinie in die Höhe kommen? Dann müssen wir nach dem dz fragen, welches einem so gewählten dx, dy entspricht

Setzen wir $ds^2 = dx^2 + dy^2$, so haben wir wegen der Diff. gleichung

$$dx = \frac{p\,ds}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad dy = \frac{q\,ds}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

$$dz = p\,dx + q\,dy = \sqrt{p^2+q^2}\,.\,ds.$$

Hier können wir auch $\frac{dz}{ds}$ geometrisch deuten. Es wird $\frac{dz}{ds}$ oder $\sqrt{p^2+q^2}$ gleich der trigonometrischen Tangente desjenigen Winkels gegen die xy-Ebene, unter welchem die Curve stärksten Falles ansteigt. Durch solche Betrachtungen können wir den Begriff der partiellen Diff. quotienten beleben.

Die zweiten Diff. quotienten

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad s' = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Zunächst entsteht die Frage, unter welchen Bedingungen ist $s = s'$?
Zur Entscheidung darüber müssen wir natürlich auf die Definition des Diff. quotienten zurückgehen.
Die genaue Definition des ersten Diff. Quot. ist:

$$p = \left(\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\right)_{\lim h=0}, \quad q = \left(\frac{f(x,y+\kappa)-f(x,y)}{\kappa}\right)_{\lim \kappa=0}$$

Daraus folgt:

$$s = \frac{\partial p}{\partial y} = \left(\frac{p(x,y+\kappa)-p(x,y)}{\kappa}\right)_{\lim \kappa=0}$$

$$= \left(\frac{\left(\frac{f(x+h,y+\kappa)-f(x,y+\kappa)}{h}\right)_{\lim h=0} - \left(\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\right)_{\lim h=0}}{\kappa}\right)_{\lim}$$

$$s = \left(\frac{f(x+h,y+\kappa)-f(x,y+h)-f(x+h,y)+f(x,y)}{h\kappa}\right)_{\lim h=0, \lim \kappa=0}$$

Hierbei ist wesentlich, dass zuerst h und dann κ zu Null gemacht wird. Analog berechnet man

$$s' = \left(\frac{f(x+h,y+\kappa)-f(x,y+\kappa)-f(x+h,y)+f(x,y)}{h\kappa}\right)_{\lim \kappa=0, \lim h}$$

wobei wir jetzt zuerst κ und dann h gleich Null zu setzen haben. Die Frage also ob $s = s'$ ist, ist identisch mit der folgenden ob es erlaubt ist, die Grenzübergänge $h=0$, $\kappa=0$ zu vertauschen: a priori kann man darüber garnichts aussagen.

Wir wollen uns einmal künstlich ein Beispiel construieren, in dem $s \neq s'$ ist.
Zunächst betrachten wir

$$z = |x^2 - y^2|$$

(dem absoluten Betrage von $x^2 - y^2$).
Die Gleichung $z = x^2 - y^2$ bez. $z = y^2 - x^2$, stellen je ein hyperbolisches Paraboloid dar, dessen Schnittgeraden mit der $z=0$ Ebene unter 45° gegen die x- und y-axe geneigt sind. Diese zerlegen die xy-Ebene in 2 Sectoren I und in 2 Sectoren II.

In den Sectoren I wird unsere Fläche mit dem ersten, in den Sectoren II mit dem zweiten Paraboloid identisch.
Sie stellt im Ganzen eine Art Kränzgewölbe dar.
Die Anschauung ergiebt unmittelbar, dass z eine eindeutige und stetige Function von x und y ist. Am bequemsten wird die Gl. der Fläche in Polar Coordinaten r und t, wo sie lautet:

$$z = r^2 |\cos 2t|.$$

Nun ist $s = \frac{\partial p}{\partial y}$ d. h. s ist die Geschwindigkeit mit welcher p wächst, wenn ich von einem Punkte x, y parallel zur y-Axe fortschreite während p die Neigung einer gewissen Flächentangente gegen die Horizontalebene bedeutet. Ebenso ist s' die Geschwindigkeit mit welcher die Neigung q wächst, wenn ich von dem Punkte x, y im Sinne der x-Axe weiter gehe. Wir wollen s und s' im Punkte $x=0, y=0$ bilden. Zu dem Zwecke haben wir in O einmal die Tangente an die Schnittcurve unserer Fläche mit der Ebene $y=0$ zu construieren und nachzusehen, wie sich ihre Neigung ändert, wenn wir die Ebene in der Richtung der y-Axe verschieben. s ist also aus dem Verlauf der Fläche in den Sektoren II zu beurteilen. Bei s' haben wir die Tangente an die Schnittcurve von $x=0$ mit unserer Fläche zu ziehen und diese in der Richtung der x-Axe zu verschieben. s' ist also aus dem Verlaufe der Fläche in den Sektoren I zu beurteilen.

Nun ist aber die Tangente in allen über der y-Axe gelegenen Punkten horizontal, d.h. es ist in allen diesen Punkten $p=0$, und daher auch $s=0$. Ebenso ist die Tangente in allen über der x-Axe gelegenen Punkten horizontal, also $q=0$ und daher auch $s'=0$. Ins Besondere ist also im Nullpunkte $s=s'=0$.

Man bestätigt dieses auch direkt durch Rechnung. Es folgt nämlich aus der in II gültigen Gl. $z=y^2-x^2$: $s=0$, und aus der in I gültigen $z=x^2-y^2$: $s'=0$. Die Gleichheit von s und s' rührt hier aber nur von den besonderen Symmetrieverhältnissen der Fläche her. Die Sache wird sofort anders, wenn wir die Fläche ein wenig um die z-Axe drehen etwa um den Winkel α $(0<\alpha<\frac{\pi}{4})$. Jetzt ist die Flächentangente (b) in den über der positiven y-Axe gelegenen Punkten ein wenig nach unten geneigt, d.h. hier ist $p<0$. Nur im Nullpunkte selbst ist auch jetzt $p=0$. Es wird also im Nullpunkte:

$\frac{\partial p}{\partial y} < 0$ oder $s < 0$.
Umgekehrt ist nach der Drehung die Flächentangente q in den über der positiven x-Axe gelegenen Punkten ein wenig nach oben gehoben, es wird hier also $q > 0$, während im Nullpunkte $q = 0$ bleibt. Also wird $\frac{\partial q}{\partial x} > 0$ oder $s' > 0$.
Mithin ist nunmehr $s \neq s'$.
Dieses können wir auch leicht analytisch bestätigen: Beim Rechnen ist es immer so, dass man mühelos zum Ziele kommt, aber ohne zum Nachdenken gezwungen zu sein. Darin liegt der Vorzug und der Nachteil des rein rechnerischen Verfahrens.
Durch die Drehung geht die Gleichung unserer Fläche in Polarcoordinaten über in die folgende:

$$z = |r^2 \cos 2(t-\alpha)| = |\cos 2\alpha \cdot r^2 \cos 2t + \sin 2\alpha \cdot r^2 \sin 2t|$$
$$= |\cos 2\alpha \cdot (x^2 - y^2) + 2 \sin 2\alpha \cdot xy|$$

d.h.

$z = \cos 2\alpha (x^2 - y^2) + 2 \sin 2\alpha \cdot xy$ in I
$z = -\cos 2\alpha (x^2 - y^2) - 2 \sin 2\alpha \, xy$ " II.

Daraufhin finden wir:

$s = -2 \sin 2\alpha$ (aus II)

$s' = +2 \sin 2\alpha$ (" I)

woraus sich richtig ergiebt $s \neq s'$.

Um die Sache ganz klar zu machen, wollen wir uns p, q, s und s' in ihrem Verlauf auf der ganzen Fläche vorstellen. Wir haben

$$p = 2x \cos 2\alpha + 2y \sin 2\alpha \qquad q = -2y \cos 2\alpha + 2x \sin \alpha$$

in I. In II ergeben sich dieselben Ausdrücke nur mit negativem Vorzeichen. Ins Besondere wird längs der Trennungslinie $t - \alpha = \frac{\pi}{4}$:

$p = \rho\sqrt{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)$, $q = \rho\sqrt{2}(-\cos\alpha + \sin\alpha)$ in I

$p = -\rho\sqrt{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)$, $q = -\rho\sqrt{2}(-\cos\alpha + \sin\alpha)$ " II

wo ρ den Abstand vom Nullpunkte bedeutet. Die Diff. quotienten sind also längs dieser Trennungslinie unstetig. Das Gleiche ergiebt sich für die andere Trennungslinie $t - \alpha = -\frac{\pi}{4}$. Nur im Nullpunkte ($\rho = 0$) schliessen sie sich stetig an einander an. Für die zweiten Diff. quotienten findet man:

$r = 2\cos\alpha$, $s = 2\sin 2\alpha = s'$, $t = -2\cos\alpha$ in I

$r = -2\cos\alpha$, $s = -2\sin 2\alpha = s'$, $t = +2\cos\alpha$ " II.

Die zweite Diff. quotienten haben innerhalb der Sektoren I und II je feste Werte, welche sich längs der Trennungslinie und auch im Nullpunkte unstetig aneinander schliessen. Die Verschiedenheit der Werte s und s' im Nullpunkte erklärt sich nun auf das einfachste. Innerhalb der einzelnen Sektoren ist allerdings überall $s = s'$. Aber: der Nullpunkt bezieht sein s aus dem Sektor II, sein s' aus dem Sektor I; da in jenem überall $s' = -2\sin 2\alpha$, in diesem $s = +2\sin 2\alpha$, müssen im Nullpunkte s und s' verschieden ausfallen.

Wir beweisen nun den allgemeinen Satz: Wenn die stetige Function $z = f(x, y)$ erste Diff. quotienten p und q besitzt, welche stetig sind, wenn ferner auch die zweiten Diff. quotienten $s = \frac{\partial p}{\partial y}$ und $s' = \frac{\partial q}{\partial x}$ stetige Functionen sind, so wird notwendigerweise $s = s'$.

Zu dem Zwecke betrachten wir den Quotienten

$$S = \frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)}{hk}$$

in welchem h und k endliche Größen bedeuten. Wenn wir die Abkürzung einführen

$$f(x, y+k) - f(x, y) = \varphi(x, y)$$

so können wir den Zähler von S schreiben:

$$\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)$$

Auf Grund der Voraussetzung über f darf φ nach dem Taylor'schen Satze hinsichtlich der Variablen entwickelt werden, falls wir alle Glieder hinter den ersten in ein Restglied zusammenfassen.
Wir haben nämlich:

$$\varphi(x+h, y) = \varphi(x, y) + h \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x+\Theta h, y), \quad [0 \leqq \Theta \leqq 1].$$

Mithin wird:

$$S = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x+\Theta h, y) = \frac{p(x+\Theta h, y+k) - p(x+\Theta h, y)}{k}$$

Auf Grund der Voraussetzung über p können wir nach dem Taylor'schen Satze wiederum ansetzen, indem wir jetzt y als Variable ansetzen:

$$p(x+\Theta h, y+k) = p(x+\Theta h, y) + k \frac{\partial}{\partial y} p(x+\Theta h, y+\Theta' k), \quad [0 \leqq \Theta' \leqq 1]$$

Also wird:

$$S = \frac{\partial}{\partial y} p(x+\Theta h, y+\Theta' k) = s(x+\Theta h, y+\Theta' k).$$

Auf ganz analoge Weise erhalten wir, wenn wir den Zähler in S etwas anders zusammenfassen und die Abkürzung

$$f(x+h, y) - f(x, y) = \psi(x, y)$$

einführen:

$$S = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y + H'k) = \frac{q(x+h, y+H'k) - q(x, y+H'k)}{h}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} q(x+\Theta' h, y+H'k) = s'(x+\Theta' h, y+H'k)$$

wo wiederum Θ', H' echte Brüche sind.
Wir haben daher

$$s(x+\Theta h, y+Hk) = s'(x+\Theta' h, y+H'k)$$

welches für jedes von 0 verschiedene h und k und für geeignet gewählte Θ, H, Θ', H' richtig ist. Lassen wir nun h und k in dieser Gl. 0 werden und berücksichtigen wir die Voraussetzung über die Stetigkeit von s und s' so folgt in der That

$$s(x, y) = s'(x, y) \qquad \text{q.e.d.}$$

In dem letzten Beispiel sind die Voraussetzungen dieses Satzes nicht erfüllt. Daher stossen wir überall auf Hemmungen, falls wir versuchen, die vorstehenden Überlegungen auf jenen Fall zu übertragen.

Dieselben Betrachtungen sind nun auch bei den dritten Diff. quotienten durchzuführen. Es gibt im Ganzen 8 dritte Diff. quotienten, von denen je die folgende 3 einander gleich sind, falls man die gehörigen Stetigkeits-voraussetzungen macht:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$$

Allgemein können wir sagen. Solange keine Unstetigkeit in den Diff. quotienten auftritt, darf die Reihenfolge der partiellen Differentiationen vertauscht werden.

§33. Der Taylor'sche Satz bei zwei Variablen.
Wir wollen uns jetzt Paraboloide von der 1, 2, 3.-Ordnung construieren, welche mit einer gegebenen Funktion $z = f(x,y)$ an der Stelle $x_0 y_0$ in dem Werte von z und den Diff. quotienten bez. bis zur 1ten 2ten, 3ten - Ordnung inclusive übereinstimmen.
Wir nennen sie „Schmiegungsparaboloide".

Das Paraboloid erster Ordnung bezeichnen wir, wie üblich, als Tangentialebene. Die Diff. quotienten an der Stelle $x_0 y_0 z_0$ seien bezw. $p_0 q_0 r_0 s_0 t_0$ etc. Man sieht es den folgenden Paraboloiden sofort an, dass sie für $x_0 y_0 z_0$ eben diese $p_0, q_0 \ldots$ als Diff. quotienten ergeben.

1) $z - z_0 = p_0 (x - x_0) + q_0 (y - y_0)$

2) $z - z_0 = p_0 (x - x_0) + q_0 (y - y_0) + \frac{1}{2} \{ r_0 (x - x_0)^2 + 2 s_0 (x - x_0)(y - y_0) + t_0 (y - y_0)^2 \}$

3) $z - z_0 = p_0 (x - x_0) + \ldots$ — — — —

etc.

Wir legen nun durch den Punkt $x_0 y_0 z_0$ ein Bündel Ebenen hindurch, welche sämtlich der z-Axe parallel laufen und nennen sie „Meridianebenen". Ihre Schnittlinien mit der xy-Ebene bilden ein Strahlenbüschel, welches durch die Gl. gegeben ist:

$$x - x_0 = R \cos \vartheta \,, \quad y - y_0 = R \sin \vartheta$$

oder

$$x = x_0 + R \cos \vartheta \,, \quad y = y_0 + R \sin \vartheta$$

Hier bedeutet R den Abstand vom Punkte $x_0 y_0$, ϑ den Winkel des einzelnen Strahles

mit der x-Axe. Letztere Grösse liefert einen Parameter, durch welchen wir die einzelnen Strahlen bez. Ebenen unterscheiden können. Bei festem ϑ und variablem R bewegt sich x, y auf einem festen Strahle bez. auf einer festen Ebene des Büschels. Wir bringen unsere Meridianebenen sowohl mit der Fläche F, wie mit den Paraboloiden zum Schnitt; jeder einzelnen Ebene (d.h. jedem ϑ) entspricht auf der Fläche eine Curve, deren Gl. in den rechtwinkligen Coordinaten R und z so lautet:

$$z = F(x_0 + R\cos\vartheta,\ y_0 + R\sin\vartheta).$$

Entsprechend lauten die Gleichungen für die Schnittcurve mit den Paraboloiden 1) und 2)

1') $\quad z - z_0 = \{p_0\cos\vartheta + q_0\sin\vartheta\}R$

2') $\quad z - z_0 = (p_0\cos\vartheta + q_0\sin\vartheta)R + \frac{1}{2!}(r_0\cos^2\vartheta + 2s_0\sin\vartheta\cos\vartheta + t_0\sin^2\vartheta)R^2$

Die Coefficienten von R und R^2 in 1') und 2') sind nichts anderes als die Diff. quotienten $\frac{dz}{dR}$ und $\frac{d^2z}{dR^2}$, gebildet für die einzelne Curve $\vartheta = \text{const.}$ auf der Fläche $z = F$.

Es ist nämlich

3) $$\frac{\partial z}{\partial R} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dR} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dR} = p\cos\vartheta + q\sin\vartheta$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial R^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dR}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{dx}{dR}\cdot\frac{dy}{dR} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dR}\cdot\frac{dx}{dR} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dR}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2x}{dR^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dR^2}\right).$$

Die Glieder in ( ) verschwinden, weil $\frac{dx}{dR}$ und $\frac{dy}{dR}$ längs der Schnittcurven Constanten sind, $\frac{d^2x}{dR^2}$ und $\frac{d^2y}{dR^2}$ also $=0$ sind. Mithin folgt:

4) $$\frac{d^2z}{dR^2} = r\cos^2\vartheta + 2s\sin\vartheta\cos\vartheta + t\sin^2\vartheta.$$

Spezialisieren wir die Ausdrücke 3) in 4) ins Besondere für den Punct $x_0\ y_0\ z_0$ so gehen sie in der That in die Coefficienten von R und R^2 in Gl^en 1') und 2') über, wie behauptet wurde.

Wir schliessen daraus:

Die Schnittcurven einer bestimmten Meridianebene mit den Schmiegungsparaboloiden sind gleichzeitig die Schmiegungscurven für die Schnittcurven derselben Meridianebene mit der gegebenen Fläche im Sinne des Taylor'schen Satzes

einer Variablen.
Man wird nach einer bequemen Formel fragen, um allgemein die Schmiegungsparaboloide höherer Ordnung wirklich zu berechnen. Eine solche ist schon von Leibnitz ersonnen.
Wir ersetzen $p_0, q_0, r_0 \ldots\ldots$ durch die ihnen gleiche Diff. quotienten $\frac{\partial(F)}{\partial x}, \frac{\partial(F)}{\partial y}$, etc und $x-x_0, y-y_0$ durch h und k.
Dann können wir die Glieder erster Ordnung in 1) und 2) so schreiben:

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)(F);$$

und die Glieder 2^{ter} Ordnung so zusammenfassen:

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(F),$$

wenn wir uns gestatten, mit den Zeichen $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ so zu rechnen, wie mit wirklichen Buchstabengrössen und wenn wir nach dem Quadrieren $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2(F)$ ersetzen durch $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ etc.
Es ist dieses ein Operieren mit Diff. quotienten, welches nur symbolische Bedeutung hat. Mit Hülfe dieses Diff. Operators können wir ferner die

Glieder 3ter Ordnung in den Paraboloiden 3ter Ordnung in die Form bringen:

$$\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3(f)$$

Das Paraboloid nter Ordnung lautet dann

b) $$z-z_0=\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)(f)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(f)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n(f).$$

Aus dieser Gl. entsteht nun der Taylor'sche Satz, wenn wir dieselbe ins Unendliche fortsetzen. Derselbe behauptet also geometrisch gesprochen, dass wir die Function zweier Variabeln $F(x_0+h, y_0+k)$ für einen gewissen Bereich der Grössen h und k ersetzen dürfen durch das Schmiegungsparaboloid unendlich hoher Ordnung, — oder analytisch ausgedrückt, dass wir F nach Potenzen von h und k entwickeln können.

Nun ist die Frage, wie weit ist das richtig und wie beweist man das?

Wir können die Frage in das Gebiet einer unabhängigen Variabeln hinüberspielen

wenn wir, wie oben, $h = x - x_0$ und $k = y - y_0$ ersetzen durch $R\cos\vartheta$ und $R\sin\vartheta$. Dann liefert uns die Gleichung 5), welche wir uns in inf. fortgesetzt denken, bei festgehaltenem ϑ geradezu die Taylor'sche Entwickelung für die Schnittcurve der Meridianebene $\vartheta = \text{const}$ mit unserer Fläche. Diese beherrschen wir nach dem Früheren, wir können also entwickeln, ob sie und wie weit sie, die Curve wirklich darstellt. Wir wollen voraussetzen, dass dieses für alle unsere Schnittcurven ein Stück lang der Fall ist. Wir grenzen uns in der $x\,y$-Ebene von $x_0 y_0$ aus alle diese Stücke ab und bekommen so ein zweidimensionales Gebiet, in dem $F(x\,y)$ mit beliebiger Annäherung durch die Gleichung (5) längs jeder Meridiancurve berechnet werden kann. d.h. im Innern dieses Gebietes ist die Function F wirklich mit dem Schmiegungsparaboloide unendlich

höher Ordnung identisch. Wenn sich ein solches zweifach ausgedehntes Gebilde angeben lässt, das den Punkt $x_0 y_0$ allseitig umgibt, nennen wir $F(x,y)$ in der Umgebung der Stelle $x_0 y_0$ eine analytische Funktion, die Stelle $x_0 y_0$ selbst eine reguläre Stelle. Indem wir diese Definition in Form eines Satzes kleiden, können wir sagen:

Eine analytische Function zweier veränderlicher lässt sich in der Umgebung jeder regulären Stelle in eine Taylorsche Reihe entwickeln.

Capitel II.

Flächenkrümmung

§ 34. Dreierlei Krümmung. Beziehung zur Theorie der Maxima und Minima. Da die geometrische Verhältnisse von dem Coordinatensysteme unabhängig sind, können wir uns dasselbe möglichst bequem legen. Wir nehmen als Anfangspunct den zu untersuchenden Flächenpunct und als xy-Ebene die Tangentialebene. Dann wird

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad p_0 = q_0 = 0$$

und die Gleichung der Tangentialebene $z = 0$. Die Flächengleichung schreiben wir nach Taylor:

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \frac{1}{3!}(\quad) + \cdots = u_2 + u_3 + \cdots$$

Ihre Schnittcurve mit der Tangentialebene ist gegeben durch:

$$0 = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + u_3 + u_4 + \cdots$$

Sie besitzt im Nullpuncte eine Singularität, wir nehmen zunächst an $u_2 \neq 0$. Dann hat die Curve einen Doppelpunct, und zwar

für $rt-s^2>0$, einen elliptischen
" $rt-s^2<0$ " eigentlichen
" $rt-s^2=0$ eine Spitze
Diese drei Fälle treten bei unseren drei Paraboloidtypen 2ten Grades auf, nämlich bezw. bei dem elliptischen Paraboloid, bei dem hyperbolischen Paraboloid, und bei dem parabolischen Paraboloid. (die letzte Bezeichnung bedeutet dasselbe, wie parab. Cylinder). Beim hyperbolischen Paraboloid besteht die Schnittcurve aus 2 Geraden, welche sich überkreuzen; beim parabolischen Paraboloid aus 2 zusammenfallenden Geraden, welche wir offenbar als eine besondere Art von Spitzen auffassen können. Wir können an diese drei Paraboloide denken, wenn wir die drei unterschiedenen Vorkommnisse als elliptische, hyperbolische, parabolische Krümmung bezeichnen.
In dem besonderen Falle, wo $u_2=0$, hat die Schnittcurve einen dreifachen Punct etc. und es greifen ähnliche Unterscheidungen Platz.

Um das Auge an das Erfassen von Krümmungsverhältnissen zu gewöhnen dient das folgende durch Rotation der Sinuscurve entstehende Modell.
Dieses Modell wird kurz erläutert, wie es in der Einleitung in die Diff. gleichungen ausführlicher geschehen ist.
Am merkwürdigsten sind die Punkte parabolischer Krümmung. Die Gleichung der Fläche kann nach Taylor beispielsweise so lauten:

$$z = \tfrac{1}{2} r x^2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

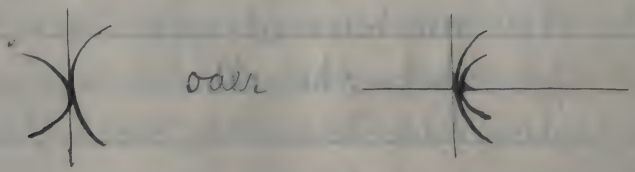
(wo die Reihe mit u_4 abbricht).
Eine solche Fläche bekommen wir, wenn wir von einer aus 2 Parabeln $x = cy^2$, $x = c'y^2$ bestehenden Schnittcurve der Fläche mit der Tangentialebene ausgehen.
Die Gleichung der ganzen Schnittcurve sei also:

$$0 = (x - cy^2)(x - c'y^2)$$

und die Gl. der Fläche

$$z = x^2 - (c + c')xy^2 + cc'y^4.$$

Hier ist der Punct $x=0\ y=0\ z=0$ sicher ein parabolischer Punct, die Gestalt der Schnittcurve aber weicht von dem, was wir bisher unter einer Spitze verstanden, erheblich ab; sie besitzt einen Selbstberührungspunct statt einer Spitze im gewöhnlichen Sinne.



Nun können wir auch die beiden Parabeln von denen wir ausgingen imaginär wählen; es müssen dann nur c und c' conjugirt imaginär sein, damit das Product der beiden Parabeln als Schnitt einer reellen Fläche auftreten kann. So kommen wir zu der folgenden Flächengleichung

$$z = x^2 - 2\alpha x y^2 + (\alpha^2+\beta^2) y^4.$$

Sie wird durch die Tangentialebene im Anfangspuncte nur in einem reellen Puncte getroffen und trotzdem besitzt sie

parabolische Krümmung.
Dies müssen wir beachten, wenn wir uns nun zu der Theorie der Maxima und Minima bei Functionen zweier veränderlichen wenden.
Eine notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremes ist natürlich die, dass die Tangentialebene horizontal liegt, d. h. $p=0$, $q=0$. Ausserdem ist erforderlich, dass der Schnitt mit der Tangentialebene ein isolierter Punct sei. Beide Bedingungen zusammen sind auch hinreichend.
Wir kommen so zu den folgenden Criterien für ein Maximum:

$$u_1 = 0 \qquad u_2 \neq 0 \qquad \begin{cases} rt - s^2 > 0 & \text{Ja} \\ rt - s^2 = 0 & ? \\ rt - s^2 < 0 & \text{Nein} \end{cases}$$

Im Falle (?) und im Falle $u_2 = 0$ sind fernere Unterscheidungen nötig. Am einfachsten verfährt man in der Weise dass man die Schnittcurve wirklich geometrisch construiert und zusieht, ob sie im Berührungspunkte der

Tangentialebene einen isolierten Punkt besitzt oder nicht.

§35. Die Bedeutung des Schmiegungs-paraboloides 2ter Ordnung.

Wir handeln nun von der Lage des Schmiegungsparaboloids 2ter Ordnung gegen die gegebene Fläche. Dabei werden wir uns wieder das Coordinatensystem möglichst bequem legen, so dass $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ $p_0 = q_0 = 0$ wird. Die Gleichung der Fläche bez. des Schmiegungsparaboloids lautet dann:

$$z = \tfrac{1}{2}(r x^2 + 2s x y + t y^2) + u_3 + u_4 + \cdots$$

$$z = \tfrac{1}{2}(r x^2 + 2s x y + t y^2)$$

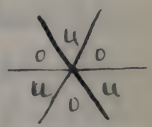
Daraus folgt für die Durchdringungs-curve beider:

$$0 = u_3 + u_4 + \cdots$$

Es ist dieses eine implicite Gleichung in x und y für eine Curve in der Tangential-ebene, welche im Punkte $x=0$ $y=0$ im Allgemeinen einen dreifachen Punkt besitzt. Errichten wir in ihren Punkten

Lote auf der Tangentialebene, so entsteht eine Cylinderfläche, welche die Durchdringungscurve enthält. Umgekehrt ausgedrückt, projiciert dieses Cylinder die Durchdringungscurve auf die Tangentialebene, wobei, wie wir sehen, mindestens ein dreifacher Punct zu Stande kommt. Die Aeste dieses dreifachen Punktes können dabei reell oder imaginär, zusammenfallend oder getrennt verlaufen.

Sind sie reell und getrennt,



so zerlegen sie die xy-Ebene in 6 Sectoren, so dass in den aufeinanderfolgenden Sectoren des Paraboloids abwechselnd oberhalb und unterhalb der Originalfläche verlauft. Im Einklang damit steht, was wir oben über die Meridiancurven der Schmiegungsparaboloide fanden. Diese erwiesen sich als Schmiegungscurven der zugehörigen Meridiancurven der Originalfläche. Zwei solche Meridiancurven müssen sich also im Nullpunkte durchdringen.

verläuft also irgend eine Meridiancurve des Paraboloides links von dem Nullpunkt oberhalb der zugehörigen Meridiancurve der Originalfläche, so verläuft sie rechts davon unterhalb derselben.

Wir können die Gleichung des Schmiegungsparaboloides noch weiter vereinfachen, wenn wir die Lage des Coordinatensystems weiter spezialisieren. Bisher wurde nur vorausgesetzt, dass die x und y Axen irgendwie innerhalb der Tangentialebene gerichtet sind. Nun ist aus der analytischen Geometrie bekannt, dass man in dem Ausdruck

$$r x^2 + 2s x y + t y^2$$

das mittlere Glied dadurch zum Verschwinden bringen kann, dass man das x-y-Kreuz passend dreht.

Dann nimmt die Gleichung des Paraboloids die folgende Gestalt an:

$$z = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2}$$

wo im parabolischen Falle $b^2 = \infty$ zu nehmen ist. (Wir schreiben a^2 und b^2, um anzudeuten, dass diese positive Grössen sind. Sollte nach der

Erhung der Coefficient von x^2 negativ ausfallen, so müssen wir noch die positive z-Richtung mit der negativen vertauschen, um genau auf die obige Form zu kommen.)
Die Gleichung der Originalfläche geht dann gleichzeitig in die folgende über:

$$z = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} + v_3 + v_4 + \cdots$$

Die so bestimmten Richtungen der x und y-Axen wollen wir die Hauptrichtungen nennen. Es gibt also in einem gewöhnlichen Punkte einer analytischen Fläche zwei zu einander senkrechte Hauptrichtungen.
Wir schneiden jetzt das Paraboloid durch eine zur Tangentialebene parallele Ebene $z = \varepsilon^2$, welche von jener den Abstand ε^2 hat. Die Gleichung der Schnittcurve

$$\frac{x^2}{a^2\varepsilon^2} \pm \frac{y^2}{y^2\varepsilon^2} = 1$$

stellt eine sehr kleine Ellipse bezw. Hyperbel dar. Ein dritter Fall kann noch eintreten, wenn $b^2 = \infty$ ist, dann besteht die Schnittcurve

$\frac{x^2}{a^2\varepsilon^2}=1$, aus zwei der y-Axe parallelen Geraden, welche den sehr kleinen Abstand $2a\varepsilon$ haben. In jedem Falle bezeichnet man die Schnittcurve als Indicatrix. Die Indicatrix ist aber nicht nur für das Paraboloid, sondern auch für die Originalfläche characteristisch. Die Ebene $z=\varepsilon^2$ schneidet nämlich die Originalfläche zwar nicht genau, aber doch nahezu d.h. soweit nur Schnittpunkte in der Nähe des Coordinatenanfangspunktes in Betracht kommen, gleichfalls in der Indicatrix. Die oben definierte Hauptrichtungen sind nun nichts anderes, als die Richtungen der Hauptaxen, in der zugehörigen Indicatrix. Speziell im hyperbolischen Falle giebt es auch ein anderes Paar ausgezeichneter Richtungen in jedem Flächenpunkte, nämlich die Richtungen, in welchen die in diesem Falle reellen Axe der Schnittcurve von Fläche und Tangentialebene verlaufen. Diese sind bei unserer Coordinatenbestimmung gegeben durch $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$.

Dieselbe Gleichung liefert aber auch die Asymptoten an die Indikatrix. Daher der Satz: Die genannten Schnittcurvenäste fallen mit den Asymptoten-Richtungen der Indikatrix zusammen. Man nennt sie daher die asymptotischen Richtungen. Die Hauptrichtungen sind die Winkelhalbierenden der asymptotischen Richtungen.

§ 36. Die Krümmungsradien der Normalschnitte.

Wir können nun genauer definieren, was wir unter Flächenkrümmung verstehen wollen.

Wir construieren uns zu jeder Meridiancurve der Originalfläche den zugehörigen Krümmungsradius ρ im Punkte $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Die Gleichung der Meridiancurve lautet in den oben benutzten rechtwinkligen Coordinaten R und z (unter ϑ das willkürliche aber feste Azimuth der Meridianebene verstanden):

$$z = R^2\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}\right) + R^3(\,) + R^4(\,) \cdots$$

Statt des Krümmungsradius mögen wir seinen reziproken Wert einführen und direkt als Krümmung bezeichnen:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2z}{dR^2}}{\left[1+\left(\frac{dz}{dR}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Nun berechnet man:

$$\frac{dz}{dR}=0 \qquad \frac{d^2z}{dR^2} = 2\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} \pm \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}\right)$$

Für $x=0$ $y=0$ d.h. $R=0$.
Wir erhalten daher als Ausdruck für die Krümmung einer Meridiancurve $\vartheta=\text{const.}$ der Originalfläche:

$$\frac{1}{\rho} = 2\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} \pm \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}\right)$$

Für das Schmiegungsparaboloid ergiebt sich natürlich ganz derselbe Ausdruck.
Die Hauptrichtungen haben die Azimuthe $\vartheta=0$ und $\vartheta=\frac{\pi}{2}$. In dieser nimmt die Krümmung extreme Werte an, wie man leicht nachrechnet. Die zugehörigen Grössen der Krümmungsradien werden Hauptkrümmungsradien

genannt und mit ρ_1 und ρ_2 bezeichnet. In den 3 unterschiedenen Fällen ergeben sich die folgenden extremen Werte der Krümmung:

Für $\vartheta = 0$	Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$	
$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{a^2}$	$\frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{b^2}$	im elliptischen Falle
$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{a^2}$	$\frac{1}{\rho_2} = -\frac{2}{b^2}$	" hyperbolischen "
$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{a^2}$	$\frac{1}{\rho_2} = 0$	" parabolischen "

Im elliptischen Falle ist also die Krümmung stets positiv im hyperbolischen Falle variiert sie zwischen positiven und negativen Werte. Insbesondere nimmt sie den Wert 0 an und zwar entsprechend den asymptotischen Richtungen. Im parabolischen Falle ist der Wert 0 selbst ein extremer Wert. Es gibt zwei besonders wichtige Verbindungen der Hauptkrümmungsradien, welche man als Gauss'sches Krümmungsmaass und als mittlere Krümmung bezeichnet, nämlich:

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \pm \frac{4}{a^2 b^2}$$ Krümmungsmaass.

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{a^2} \pm \frac{2}{b^2}$$ mittlere Krümmung.

Das Krümmungsmaass ist positiv, negativ oder Null, jinachdem die Fläche elliptisch, hyperbolisch, oder parabolisch gekrümmt ist und umgekehrt.
Bezüglich der mittleren Krümmung beweisen wir den folgenden Satz: Wenn wir die Krümmung irgend zweier Meridianschnitte zueinander addieren, welche unter 90° zu einander geneigt sind, so ergibt sich immer der Wert der mittleren Krümmung; oder in Formeln, wenn wir mit ρ einen beliebigen, mit ρ' den Krümmungsradius in einem zu dem ersteren senkrechten Meridianschnitte bezeichnen, so wird:

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}.$$

Wir haben nämlich

$$\frac{1}{\rho} = 2\left(\frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} \pm \frac{\sin^2 \vartheta}{b^2}\right), \quad \frac{1}{\rho_1} = 2\left(\frac{\sin^2 \vartheta}{a^2} \pm \frac{\cos^2 \vartheta}{b^2}\right)$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen resultiert in der That

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}.$$

Diese Betrachtungen bilden nun den Anfang einer grossen Theorie, der Differential-Geometrie, welche für die Anwendungen fast noch wichtiger ist, wie die andere Seite der Geometrie, die projektive.
Man muss sie alle beide studieren.

Capitel III

Excurs über Raumcurven

§37. Tangente, Osculationsebene etc.

Eine Raumcurve entsteht entweder als Schnitt zweier Flächen:

$$f_1(x\,y\,z) = 0 \qquad f_2(x\,y\,z) = 0$$

oder wir fassen sie als Bahncurve auf, die ein materieller Punkt x, y, z in der Zeit t beschreibt:

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad z = \chi(t).$$

(was wir im Folgenden bevorzugen wollen). Setzen wir voraus, dass φ, ψ, χ analytische Functionen sind, so haben wir:

$$x = \varphi_0 + \frac{t}{1}\varphi_0' + \frac{t^2}{2!}\varphi_0'' + \cdots$$

$$y = \psi_0 + \frac{t}{1}\psi_0' + \frac{t^2}{2!}\psi_0'' + \cdots$$

$$z = \chi_0 + \frac{t}{1}\chi_0' + \frac{t^2}{2!}\chi_0'' + \cdots$$

Als Vergleichscurven benutzen wir die folgenden Schmiegungscurven 1ter und 2ter Ordnung:

I $\begin{cases} x = \varphi_0 + t\varphi_0' \\ y = \psi_0 + t\psi_0' \\ z = \chi_0 + t\chi_0' \end{cases}$ II $\begin{cases} x = \varphi_0 + t\varphi_0' + \frac{1}{2}t^2\varphi_0'' \\ y = \psi_0 + t\psi_0' + \frac{1}{2}t^2\psi_0'' \\ z = \chi_0 + t\chi_0' + \frac{1}{2}t^2\chi_0'' \end{cases}$

I ist die Gleichung einer Gerade.
Berücksichtigen wir dass $\varphi_0, \psi_0, \chi_0$ bez. $= x_0, y_0, z_0$ so ergiebt sich nämlich aus I durch Elimination von t:

$$\frac{x-x_0}{\varphi_0'} = \frac{y-y_0}{\psi_0'} = \frac{z-z_0}{\chi_0'}.$$

Diese Annäherungsgerade heisst die Tangente der Raumcurve in $x_0 y_0 z_0$.
Die Richtungscosinus derselben sind $\varphi_0', \psi_0', \chi_0'$.
Die Gleichung der Normalebene in demselben Punkte lautet dementsprechend:

$$(x-x_0)\varphi_0' + (y-y_0)\psi_0' + (z-z_0')\chi_0' = 0.$$

Wie steht es mit der Tangentialebene?
Offenbar muss jede Ebene, welche durch die Tangente hindurchgeht, als Tangentialebene gelten. Es giebt daher nicht eine, sondern ein ganzes Büschel von Tangentialebenen

Ist unter diesen etwa eine ausgezeichnete, welche die Curve inniger berührt?
Eine ebene Curve als Raumcurve aufgefasst, besitzt offenbar eine solche Ebene, nämlich diejenige in der sie enthalten ist. Bei der Raumcurve kommen wir zu etwas analogem von der Schmiegungscurve II aus.
Wir behaupten die Gleichungen II stellen eine ebene Curve dar und die Gleichung ihrer Ebene lautet:

$$\begin{vmatrix} x-\varphi_0 & \varphi_0' & \varphi_0'' \\ y-\psi_0 & \psi_0' & \psi_0'' \\ z-\chi_0 & \chi_0' & \chi_0'' \end{vmatrix} = 0.$$

In der That folgt aus bekannten Determinantensätzen, dass diese Gl. erfüllt ist, wenn wir die Werte von $x-\varphi_0$, ----- eintragen, wie sie sich aus II ergeben. Diese Ebene nennt man die Osculationsebene. In ihr verläuft II als Kegelschnitt. Um die Gestalt der Curve im einzelnen zu studieren, geben wir dem Coordinaten-

Systeme eine bequeme Lage gegen die Curve, und zwar machen wir den zu untersuchenden Curvenpunkt zum Anfangspunkt, die Tangente zur x-Axe die Osculationsebene zur z-Ebene. Dann wird $\varphi_0 = \psi_0 = \chi_0 = 0$, ferner wegen I wird $\psi_0' = \chi_0' = 0$.
Die durch die vorstehende Determinante gegebene Gl. der Osculationsebene reduziert sich daraufhin auf,

$$\varphi_0' (\psi_0'' z - \chi_0'' y) = 0$$

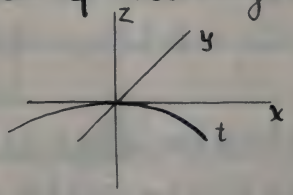
Soll sie mit der z-Ebene, d.h. mit der Gl. $z = 0$ zusammenfallen, so muss $\chi_0'' = 0$ werden. Die Parametergleichungen unserer Curve in dem so spezialisierten Coordinatensysteme sehen daher folgendermassen aus, (wenn wir noch der Kürze halber den Index $_0$ fortlassen.):

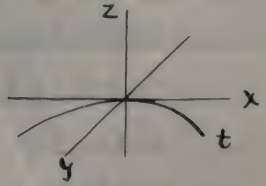
$$\text{III} \quad \begin{cases} x = \varphi' t + \frac{1}{2}\varphi'' t^2 + \frac{1}{6}\varphi''' t^3 + \cdots \\ y = \frac{1}{2}\psi'' t^2 + \frac{1}{6}\psi''' t^3 + \cdots \\ z = \frac{1}{6}\chi''' t^3 + \cdots \end{cases}$$

Über die Lage der Curve zu ihrer Osculationsebene folgt aus der letzten

dieser Gleichungen zunächst, dass die Curve ihre Osculationsebene durchdringt. In der That ändert z sein Vorzeichen, wenn t durch 0 geht.
Sodann haben wir, wenn wir unsere Curve mit einer Schraubenlinie vergleichen, 2 verschiedene Typen zu unterscheiden. Die Curve kann entweder „rechts" oder „links" gewunden sein. Rechtsgewunden nennen wir sie, wenn sie zur positiven z-Axe so liegt, wie die bei uns ausschliesslich gebräuchlichen Schraubengänge zu derjenigen Richtung, in der sie bei der Drehung fortschreiten.
Wir behaupten, dass das analytische Kriterium hierfür durch das Vorzeichen des Productes $\varphi' \psi'' \chi'''$ in II gegeben wird. Zum Beweise müssen wir eine Unterscheidung bei dem jeweils benutzten Coordinatensystem eintreten lassen. In der analytischen Geometrie gibt es zwei verschiedene rechtwinklige Coordinatensysteme, welche nicht mit

einander zur Deckung gebracht werden können.
Verteilen wir nämlich die Buchstaben x y z, welche die positive Richtung der Axen angeben sollen, beliebig auf die Enden eines Axenkreuzes, so können wir stets durch blosse Drehung erreichen, dass die positive z-axe nach oben, die positive x-axe nach rechts gerichtet ist. Dann kann aber die positive y-axe nach hinten (Typus I) oder nach vorn (Typus II) weisen.
Das Vorzeichen des zu einer gegebenen Curve gehörigen Produktes $\varphi' \varphi'' x'''$ fällt in beiden Fällen verschieden aus.
Zunächst kann man in beiden Fällen φ' als positiv voraussetzen. Ist nämlich φ' negativ, so vertauschen wir t mit $\tau = -t$, wobei φ' sein Zeichen wechselt.





Geometrisch heisst dies; wir können den

Parameter so wählen, dass er im Nullpunkte wächst mit wachsendem x, also nach der in der Fig. durch ein beigesetztes t gekennzeichneten Seite. Im Uebrigen lesen wir aus der Fig. das folgende Vorzeichenschema ab:

	I	II
φ'	+	+
ψ''	−	+
x'''	−	−
$\varphi'\psi''x'''$	+	−

Wir haben daraufhin den Satz:
Ob eine in unserer Normalform III gegebene Curve rechts oder links gewunden ist, hängt von dem Vorzeichen des Products $\varphi'\psi''x'''$ ab, und zwar besitzt im Coordinaten-System I eine rechts gewundene Curve ein positives, im Coordinaten-System II eine rechts gewundene Curve ein negatives Product $\varphi'\psi''x'''$.
Bei der beschriebenen Lage des Coordinaten-Systems gegen die Curve giebt die x-Axe die Tangente der Curve an. Die y und z-Axen

ein zwei (unter den unendlich vielen möglichen) ausgezeichneten Normalen. Man bezeichnet die y-Axe als Hauptnormale, die z-Axe als Binormale der Curve. Die Hauptnormale ist also diejenige Normale, welche in der Oscilationsebene liegt, die Binormale diejenige, welche auf ihr senkrecht steht, also auf Tangente und Oscilationsebene senkrecht steht, woher der Name.

Projizieren wir noch die Raumcurve im Sinne dieser 3 Richtungen auf die drei Coordinatenebenen, so ergeben sich sehr eigenthümliche und sehr verschiedene Verhältnisse.

1) Projection im Sinne der Binormalen. Die Gleichungen des in der Oscilationsebene verlaufenden Bild der Curve sind:

$$x = \varphi' t + \tfrac{1}{2}\varphi'' t^2 + \cdots$$

$$y = \cdots \tfrac{1}{2}\psi'' t^2 + \cdots$$

Diese Ebenen liefern eine ebene Curve ohne irgend welche Singularität im Anfangspunkte.

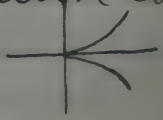
In der Richtung der Binormalen gesehen erscheint die Curve in der Nähe des Nullpunktes als eine gewöhnliche Parabel.

2) Projektion im Sinne der Hauptnormalen.
Die Gleichungen der in der y-Ebene verlaufenden Bilder sind:

$$x = \varphi' t + \cdots$$
$$z = \tfrac{1}{6} x''' t^3 + \cdots$$

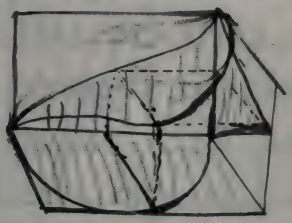
Dies ist eine ebene Curve, welche im Nullpunkte eine horizontale Wendetangente besitzt. Es folgt dieses auch einfach daraus, dass die Raumcurve ihre Osculationsebene durchdringt, in dass die Osculationsebene bei unserer Projektion in die horizontale Gerade übergeht.

3) Projektion im Sinne der Tangente.
Dabei entsteht in der Normalebene eine Bildcurve mit horizontal gelegener Spitze.



Die Gleichungen derselben sind:

$$y = \tfrac{1}{2}\psi'' t^2 + \dots$$
$$z = \tfrac{1}{6}\chi''' t^3 + \dots$$



Ein sehr einfaches Beispiel einer Raum-Curve bildet die Schraubenlinie:

$$x = a\cos t \,,\quad y = b\sin t \,,\quad z = ct \,.$$

Diejenige Fläche, welche von der Gesammtheit der Tangenten einer Raumcurve gebildet wird, nennt man allgemein eine abwickelbare Fläche, weil man sie ohne Zerreissen und Falten glatt auf eine Ebene abrollen kann. Die abwickelbare Fläche hat längs der zugehörigen Raumcurve eine scharfe Kante, eine sogenannte Rückkehrkante.

Capitel IV

§ 38. Excurs über complexe Grössen.

Es folgt eine Einleitung über den Begriff der complexen Zahlen, ihre geometrische Darstellung nach Gauss (Gauss'sche Ebene) sowie den Zusammenhang der Exponential-Function mit den trigonometrischen Functionen im complexen Gebiete.

Alles dieses ist in jedem einschlägigen Lehrbuche zu finden.

Eine Anschauung von dem Verlauf der Functionen im Complexen erhält man, wenn man den reellen oder imaginären Teil u oder v der Function sich als eine Fläche darstellt:

$$\zeta = u(\xi,\eta) \quad \text{oder} \quad \zeta = v(\xi,\eta)$$

Diese Flächen des reellen und imaginären Teils einer complexen Function, haben nun noch sehr wichtige Differential-eigenschaften. Wir leiten zunächst einige dies bezügliche Formeln ab.

Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{df}{dx}\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{df}{dx} \qquad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{df}{dx}\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{df}{dx}\cdot i$$

also

1) $$\frac{\partial f}{\partial \eta} = i\frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

Daraus folgt, wenn f in $u+iv$ gespalten wird

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + i\frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{\partial v}{\partial \xi} + i\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

oder

2) $$\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

Durch geignete Differentiation und Addition der Gl'en 2) ergiebt sich endlich

3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0$$

Diese Formeln wollen wir uns ins Geometrische übersetzen.

Aus der Fläche $\zeta = u(\xi,\eta)$ schneidet die Ebene $\zeta = c$ eine horizontale ebene Curve $c = u(\xi,\eta)$ aus, ebenso aus der Fläche $\zeta = v(\xi,\eta)$ die Ebene $\zeta = c'$ die horizontale Curve $c' = v(\xi,\eta)$. Die Curven wollen wir in die $\xi\eta$ Ebene projicieren, wodurch wir dieselbe mit einer doppelten

Curvenschaar $u=C$, $v=C'$ überdecken.
Längs jeder solchen Curve ist bezw.

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial v}{\partial \eta} d\eta = 0$$

Aus 2) folgt aber:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 .$$

Diese Gl. besagt, dass die Fortschreitungsrichtungen $\frac{d\xi}{d\eta}$ der Curven $u=C$, $v=C'$ in ihrem Schnittpunkte aufeinander senkrecht stehen.
Unsere Curvenschaaren in der $\xi\eta$-Ebene schneiden sich also überall rechtwinklig.
Die zu den Horizontalcurven senkrechten Curven nannten wir früher die Curven stärksten Falles, indem wir uns dieselben durch Projektion auf die Fläche im Raume übertragen dachten.
Es bedeuten also die Curven $v=C$ für unsere Fläche $\zeta = u(\xi\eta)$ die Projektionen der Curven stärksten Falles, und umgekehrt die Curve $u=C$ für die Fläche $\zeta = v$.
Gehen wir längs der projicierten Curven

$v = C$ um das Stück $ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = \frac{d\xi}{\frac{\partial v}{\partial \eta}} \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2}$
vorwärts, so steigen wir auf der
Fläche $C = u(\xi, \eta)$ um das Stück

$$d\zeta = \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta = \frac{\partial \xi}{\frac{\partial v}{\partial \eta}} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)$$

$$= \frac{d\xi}{\frac{\partial v}{\partial \eta}} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2 \right) = ds \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2}$$

an. Umgekehrt steigt die Fläche
$C = v(\xi, \eta)$ längs der Fallinie $u = C$
beim Fortschreiten um $ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$
um das Stück

$$d\zeta = ds \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2}$$

an.

Nach Gl. 2) sind aber beide Quadratwurzeln identisch. Es steigen also zwei zusammengehörige u- und v-Flächen an jeder Stelle gleich viel an. Schliesslich ziehen wir aus den Gln 3) Folgerungen über die Krümmung unserer Flächen. Wir können Gln 3) mit Benutzung unserer früheren Bezeichnung so schreiben: $r + t = 0$. Es haben also r und t verschiedene Vorzeichen. Mithin hat rt das negative

und $-(rt-s^2)$ das positive Vorzeichen.
Die Ungleichung

$$\underbrace{s^2-rt}_{} > 0$$

war aber die Bedingung für die hyperbolische Krümmung. Unsere Flächen $\xi = u$ und $\zeta = v$ sind daher überall hyperbolisch gekrümmt.
Nun die genauere Diskussion:
Allgemein gilt für die ζ-Coordinate einer analytischen Fläche:

$$\zeta = \zeta_0 + ph + q\kappa + \tfrac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \cdots$$

Die Tangentialebene ist

$$\zeta = \zeta_0 + ph + q\kappa.$$

Längs der Schnittcurve beider haben wir:

$$0 = \tfrac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \cdots\cdots$$

eine Gleichung, welche die auf die $\xi\eta$-Ebene projicirte Schnittcurve darstellt. Die Tangenten im Doppelpunkte der Schnittcurve sind durch die quadratische Gleichung gegeben:

$$\left(\frac{h}{k}\right)^2 + \frac{2s}{r}\frac{h}{k} + \frac{t}{r} = 0.$$

In unserem Falle ist $\frac{t}{r} = -1$ daher besteht für die Wurzeln $\frac{h'}{k'}, \frac{h''}{k''}$ unserer quadratischen

Gleichung die Beziehung

$$\frac{k'}{\kappa'} \cdot \frac{k''}{\kappa''} = -1,$$

welche aussagt, dass die Tangenten der projicierten Curve aufeinander senkrecht stehen. Das Bestehen der Diff. Gleichung 3) kommt somit in dem geometrischen Satze zum Ausdruck:

Die Aeste der in der $\xi\eta$-Ebene orthogonal projicierten Schnittcurve von Fläche und Tangentialebene, stehen auf einander senkrecht.

Es zeigt sich hier ein intimer Zusammenhang zwischen den Differentialbeziehungen, welche an der Spitze der complexen Functionentheorie stehen, und den infinitesimalgeometrischen Eigenschaften gewisser reeller Flächen.

Diese Bemerkung möge den Schluss unserer Vorlesung bilden: Die einzelnen Zweige der Mathematik hängen viel enger und organischer zusammen, als es dem einseitig denkenden erscheinen mag.

Integralrechnung

Vorlesung von Prof. Dr Klein

Winter Semester 1896/97.

Inhaltsverzeichniss der Integral Rechnung

Einleitung.

Literarische Hülfsmittel.

Der Functionsbegriff.

Entstehung des Diff. quotienten.

Flächeninhalt und bestimmte Integrale.

Beispiele. x^n e^x

Unbestimmte Integrale.

Differentiation und Integration als inverse Operation

Die fundamentale Tabelle der einfachsten Inte

Die scheinbare Sondarstellung des log.

Integration durch Substitution und partielle Integ

I Hauptteil. von der analytischen Berechnung der In

Eintheilung der zu integrierenden Functionen.

Allgemeines über rationale Functionen.

vorbereitungen zur Partialbruchzerlegung.

Der allgemeine Fall der "

Mehrfache Wurzeln

Besondere Berücksichtigung imaginärer Wurzeln.

Allgemeines über Integration algebraischer Funct.

Rationalmachen des Integranden in einfachen

Beispielen.

von der Irrationalität $\sqrt{a+bx+cx^2}$. Allgemeines über den
Fortsetzung: formelle Durchführung. Beispiele
Trigonometrische Functionen.
Andere transcendente Functionen.
Die Integration definirt eventuell neue Functionen
Rückblick auf die Methode der Partialbrüche.

II Hauptteil. Von der praktischen Berechnung der Integrale
Erste Abschätzung eines Integrals durch Mittelwerte
Revision des Taylorschen Satzes (Neuableitung des Restgliedes)
Berechnung von Integralen durch den Taylorschen Satz.
Wesen der allgemeinen parabolischen Interpolation
Zusammenhang mit den Partialbrüchen.
Die allgemeine Abschätzung des Restgliedes.
Trapezformel. Die gewöhnliche parabolische Interpolation
Die Grenzparabel 3ter Ordnung. Allgemeine Ansätze
Abteilungsweise Berechnung der niederen
Interpolationsformeln bei Simpson und MacLaurin
Integrierapparate: Amsler'sche Polarplanimeter.
Der harmonische Analysator von Henrici.
(mit Excurs über die Fourier'sche Reihe)
Der Integrierapparat von Abdank-Abakanowicz
Der Planimeter von Prytz.

Zwischenteil: Anwendungen der Integralrechnung.
Flächeninhalt ebener Figuren.
Bogenlänge ebener Curven.
" von Raumcurven.
Rotationsflächen.
Schwerpunkte, Guldin'sche Regeln.
Indicatordiagramm.
Strenge und Anschaulichkeit in der Mathematik.

III Hauptteil. Feinere Ausführungen zur Integralrechnung.
Unendlichwerden des Integranden und der Grenzen an Beispielen.
Desgleichen allgemeine Regeln.
Gliedweise Integration unendlicher Reihen.
Diff. und Integration nach einem Parameter.
Über Berechnung ausgezeichneter bestimmter Integrale.
Das Wahrscheinlichkeitsintegral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.
Allgemeines über fluctuierende Funktionen.
Definition neuer Integrale durch bestimmte Integrale.
Die Perioden der elliptischen Integrale.
Die Gammafunktion.
Theorie der Fourier'schen Reihe.
Die endliche Reihe und ihr Restglied.

Näheres Studium der Hülfscurve.
Vorbereitungen zur Abschätzung des Restgliedes.
Durchführung der Abschätzung.
Convergenz der ∞ Fourierschen Reihen.
Verlauf der successiven Annäherungscurven.
Gliedweise Integration. Differentiation der Reihe.

IV Hauptteil. Ausdehnung der Integralrechnung auf mehrere Variable.

1) Die mehrgliedrige Differentialausdrücke.
Das exakte Differential bei 2 Variabeln.
Ausdehnung auf mehr Variable. Differentialgleichungen
Eine geometrische Deutung des 2gliedrigen
Charakteristischer Unterschied des exakten und unexakten
Kreisprocesse, welche einzelne Punkte umspannen. Clausius

2) Die mehrfachen Integrale.
Doppelintegral als Rauminhalt.
Definition des Doppelints. durch Grenzprocess.
Beispiele; noch einmal das exakte Diff.
Rauminhalt in Polarcoordinaten.
Unendlichwerden des Integranden oder der Grenzen
Allerlei Anwendungen der mehrfachen Integrale
über den Inhalt krummer Oberflächen.
Einleitung in die Potentialtheorie.
Das Potential im Innern des anziehenden Körpers.

Capitel I. Einleitung.

§1 Definition des Functionsbegriffes.

Allgemeine Definition des Functionsbegriffes:
y ist in einem Intervalle eine Function von x, wenn zu jedem Werte von x in diesem Intervalle ein Wert von y gehört, gleichviel, ob die Function stetig und welcher Art die zwischen den beiden Variablen bestehende Gesetzmässigkeit ist.
Die Functionen haben zur Unterabteilung die <u>stetigen Functionen</u> und unter diesen treten besonders die <u>analytischen</u> hervor. Man versteht unter analytischen Functionen diejenigen Functionen, bei denen sich y in der Nähe einer Stelle x_0 durch Potenzen von $x-x_0$ nach der Taylor'schen Reihe darstellen lässt, also

$$y = y_0 + a(x-x_0) + b(x-x_0)^2 + \dots$$

Anmerkung: Aelbere Lehrbücher beschränken sich auf die analytischen Functionen.

Neuere schwelgen in Irregularitäten.
Man behauptete in der Natur kommen nur analytische Funktionen vor.
Dagegen ist zu sagen: Für die Beschreibung sehr vieler Naturerscheinungen reicht man mit einfachen analytischen Funktionen aus. Aber für eingehendere Betrachtungen, insbesondere diejenige, die sich mit molecularer Auffassung beschäftigen, reichen die einfachen nicht aus.

§2. Entstehung und Definition des Differential-quotienten.

1) Wie kommt man zum Diff. Quotienten?

a) Geometrie: $\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi$ gibt den Verlauf einer Curve wieder.

b) Mechanik: $\frac{dy}{dx}$ = Geschwindigkeit (wo x = Zeit, y = Weg).

2) Genaue Definition

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

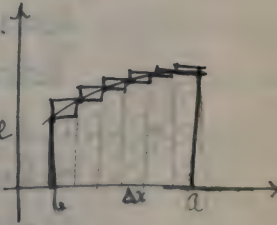
Der Differentialquotient ist die Grenze

des Differenzenquotienten für unendlich abnehmendes Δx, — womit noch gar nicht gesagt sein soll, ob diese Grenze bei jeder Function eintreten wird.

Anmerkung. Der Differentialquotient ist die Grenze eines Quotienten, aber nicht der Quotient zweier Grenzen.

§ 3. Einführung des bestimmten Integrals durch Betrachtung des Flächeninhalts.

Aufgabe: Der Inhalt der schraffierten Fläche ist zu berechnen.



Man teile die Grundlinie in n gleiche Teile und summiere die schmalen Rechtecke, deren Höhe 1) die linke Ordinate und 2) " rechte " ist.

Dann ist:

1) $\Sigma_1 = \sum_{1}^{n} \kappa \; f\left(b + (\kappa-1)\frac{a-b}{n}\right) \cdot \frac{a-b}{n}$

2) $\Sigma_2 = \sum_{1}^{n} \kappa \; f\left(b + \kappa \frac{a-b}{n}\right) \cdot \frac{a-b}{n}$

Der gesuchte Flächeninhalt ist dann

$\lim(\Sigma_1)_{n=\infty}$ oder auch $\lim(\Sigma_2)_{n=\infty}$

Σ_1 und Σ_2 sind Spezialfälle von dem allgemeineren Ausdruck für den Flächeninhalt:

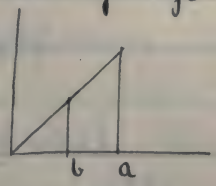
$$\lim \left(\sum_b^a f(x) \cdot \Delta x\right) = \int_b^a f(x)\, dx .$$

Um also den krummlinigen Flächeninhalt zu berechnen, bildet man sich das „bestimmte Integral von $f(x)\,dx$ genommen von b bis a“:
Man versteht darunter den Limes der Summe $\Sigma f(x) \Delta x$, der sich für immer zahlreichere und also immer kleiner werdende Δx einstellt.
Wir sagen diese Summe bedeutet das Aggregat der Rechtecke, welche man über den einzelnen Stückchen Δx errichten kann, indem man als Höhe ein $f(x)$ benutzt, das zu einem Abscissenwerte gehört, welcher auf dem Stückchen Δx liegt.
Beispielsweise können wir als solchen Functionswert die Ordinate des linken (rechten) Endpunktes von Δx benutzen.

§4. Beispiele.

1) $y = c$, wird als zu trivial übergangen.

2) $y = x$



Hierbei bemerkt man sofort:

$$\int_b^a = \int_0^a - \int_0^b$$

Berechnet wird zunächst $\int_0^a$.

Es ist

$$\sum_1 = \sum_1^n (k-1)\frac{a}{n}\cdot\frac{a}{n} = \frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_2 = \sum_1^n k\cdot\frac{a}{n}\cdot\frac{a}{n} = \frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\int_0^a x\,dx = \lim\left[\sum_1 = \frac{a^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] = \lim\left[\sum_2 = \frac{a^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{a^2}{2}.$$

Ebenso ist

$$\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}.$$

Also wird

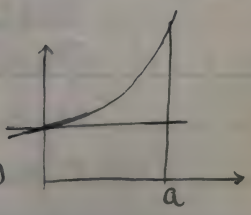
$$\int_b^a x\,dx = \int_0^a x\,dx - \int_0^b x\,dx = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2},$$

wie auch die elementare Mathematik zeigt.

3) $y = e^x$

Gesucht ist $\int_0^a e^x\,dx$

Es ist



$$\sum_1 = \sum_1^n \frac{a}{n}\cdot e^{(k-1)\frac{a}{n}}\cdot\frac{a}{n} = \frac{a}{n}\left(1+e^{\frac{a}{n}}+\cdots\right)$$

$$= \frac{e^a - 1}{\left(e^{\frac{a}{n}}-1\right)\frac{n}{a}}$$

Nun ist

$$e^{\frac{a}{n}} - 1 = \frac{a}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \text{- - - -}$$

$$\frac{n}{a}\left(e^{\frac{a}{n}} - 1\right) = 1 + \frac{1}{2}\frac{a}{n} + \frac{1}{3!}\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \text{- - -}$$

$$\lim \frac{n}{a}\left(e^{\frac{a}{n}} - 1\right) = 1$$

Also

$$\int_0^a e^x\,dx = e^a - 1.$$

§ 5. Einführung der unbestimmten Integrale.

Das bestimmte Integral

$$\int_1^a f(x)\,dx$$

hat immer die Gestalt: $F(a) - F(b)$

Lässt man die untere Grenze fest, so erhält man notwendigerweise:

$$\int^a f(x)\,dx = F(a) + \text{Constante}.$$

Das unbestimmte Integral hat also die Gestalt $F(a) + C$, wo C eine beliebige von a nicht abhängige Grösse ist, die man die Integrationsconstante nennt.

Das unbestimmte Integral entsteht aus dem bestimmten, wenn man nur auf die obere Grenze achtet, und auf die untere kein Gewicht legt.

Betrachtet man in der letzten Formel a als Variable (der Flächeninhalt ist ja abhängig von a) so erhält man

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

In der so geschriebenen Formel, die man überall in der Litteratur benutzt findet, kommt leider der Buchstabe x in doppelter Bedeutung vor; nämlich als Integrationsbuchstabe, der das Intervall von der unteren bis zur oberen Grenze durchläuft, und dann zur Bezeichnung der oberen Grenze selbst.

§ 6. Differentiation und Integration als inverse Operationen.

Ist

$$\int^{x} f(x)\,dx = F(x) + C$$

so ist

$$\frac{d\,F(x)}{dx} = f(x)$$

unter der Voraussetzung, dass f(x) stetig ist

Beispiele:

1) Bei der Bewegung eines Punktes auf gegebener Bahn ist der Zusammen-

hang zwischen Diff. quotient und Integral ohne Weiteres evident: Betrachtet man nämlich die Weglänge als Function der Zeit $y = Fx$, so bekommt man die Geschwindigkeit durch Differentiation von Fx nach x, betrachtet man umgekehrt die Geschwindigkeit fx als Function der Zeit, so bekommt man die Weglänge durch Integration.

2) Der Flächeninhalt ist das Integral der Ordinate, die Ordinate der Differentialquotient des Flächeninhalts.

3) Die Ordinate einer Curve ist das Integral ihres Differentialquotienten.

§7 Integration der einfacheren Functionen.

Von praktischer Wichtigkeit ist es nun, zu einer gegebenen Function diejenige Function zu bestimmen, durch deren Differentiation jene erste Function entsteht.

Integraltafel

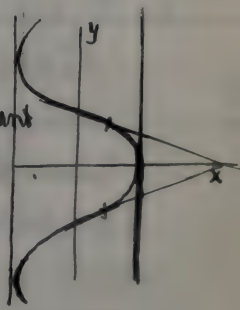
Gegebene Function	Diff. quotient derselben	Integral derselben
$y = x^n$	$y' = n x^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$y = \log x$	$y' = x^{-1}$	$\int x^{-1} dx = \log x + C$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$y = \arcsin x$	$y' = \begin{cases} * \\ \frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$	$\int \frac{\pm dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ \text{oder} \\ \arccos x + C \end{cases}$
$y = \arccos x$		
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

* Anmerkung: Der Diff. quotient von arcsin ist positiv, wenn die Tangente von links nach rechts aufsteigt, negativ wenn sie von rechts nach links aufsteigt.

$$\arcsin x - \frac{\pi}{2} = \arccos x$$

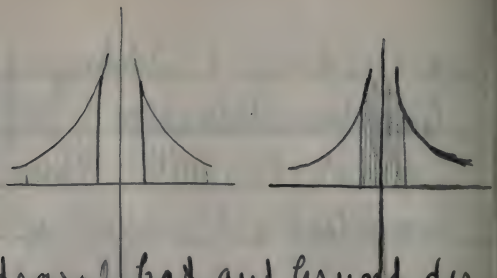
arcsin ist + im 1 und 4, − im 2 und 3 Quadrant

arccos " + " 3 " 4, − " 1 " 2 "



Bemerkung: Man darf nie gedankenlos integrieren.

1. Beispiel: $y = x^{-2}$



Ein bestimmtes Integral hat auf Grund der bisheriger Definition keinen Sinn, wenn die zu untersuchende Function in dem Intervalle unendlich wird.

2. Nach bisheriger Definition sind auch imaginäre Ordinaten nicht brauchbar.

3. Beachte die Vorzeichen der Ordinaten:

z. B. $y = x^{\frac{1}{2}}$

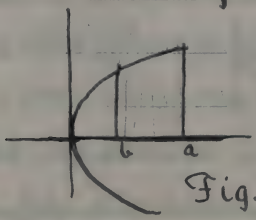


Fig. 1

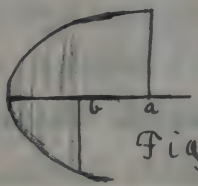


Fig. 2

Der Flächeninhalt in Fig. 2 ist

$$\int_0^a +x^{\frac{1}{2}}dx + \int_0^b x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}$$

wo die Grössen $a^{\frac{1}{2}}$ und $b^{\frac{1}{2}}$ als positive Grössen gedacht werden.

§ 8. Die scheinbare Sonderstellung des log.

Bemerkung: Es ist

$$1) \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

und

$$2) \quad \int x^{-1} dx = \log x$$

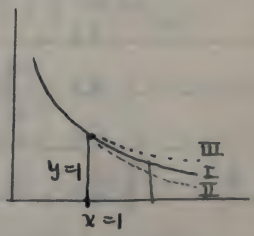
Hier scheint die Formel 2) eine Unstetigkeit der Formel 1) auszufüllen. Das ist aber nicht der Fall.

I. rein geometrisch:

Curve I: $y = \frac{1}{x}$

.. II: $y = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$

.. III: $y = \frac{1}{x^{1-\varepsilon}}$



I reiht sich also zwischen II und III ein.

II. Algebraisch:

Die Formel 2) fügt sich in der That den Formeln 1) nach dem Gesetze der Stetigkeit ein und hat nur dadurch ein anderes Aussehen, weil Formel 1) für $n = -1$ unmittelbar genommen $\frac{0}{0}$ liefert, so dass man den wahren Wert, d.h. den Wert, der sich nach der Stetigkeit ergiebt, durch Differenzieren herstellen muss.

Es ist

$$\int_1^x x^n dx = \frac{x^{n+1}-1}{n+1}$$

oben und unten wird differentiiert

$$\frac{d(x^{n+1}-1)}{dn} = x^{n+1} \cdot \log x$$

$$\lim_{n=-1} x^{n+1} \log x = \log x \qquad \text{q. e. d.}$$

Fernere Regeln zur Integration:

1) $\int c u \, dx = c \int u \, dx$ wo c = Const.

2) $\int (u+v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx$.

§9 { 3) Integration durch Substitution.
4) Integration " Teile.

3) Integration durch Substitution:
Läßt sich ein Integral nach den Grundformeln nicht direkt auflösen, so ist häufig eine Substitution zweckmässig: $x = \varphi(t)$, wobei t von t_0 bis t_1 läuft, während x von x_0 bis x_1 läuft. Wir schreiben jetzt:

$$\sum_{x_0}^{x_1} f(x) \Delta x$$

in der Form

$$\sum_{t_0}^{t_1} f(x) \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \Delta t .$$

Durch den Grenzübergang erhalten wir:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\,\frac{d\varphi(t)}{dt}\,dt$$

Bei der Substitution muss man also nicht nur die Grenzen des Integrals ändern, sondern man muss unter dem Integralzeichen den Faktor $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ hinzufügen.

Beispiele: $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{ax+b} = \int_{ax_0+b}^{ax_1+b} \frac{dt}{a\cdot t} = \left|\frac{1}{a}\log t\right|_{ax_0+b}^{ax_1+b}$

$$= a^{-1}\log\frac{ax_1+b}{ax_0+b}\;;\quad (t=ax+b)$$

4) Integration durch Teile (partielle Integr.)

Aus der Diff. Rechnung ist bekannt:

$$\frac{d(u(x)\cdot v(x))}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

also ist auch:

$$u\frac{dv}{dx} = \frac{d(u\cdot v)}{dx} - v\frac{du}{dx}$$

woraus durch Integration sofort folgt:

$$\int_b^a u\frac{dv}{dx}\,dx = \left[u\cdot v\right]_b^a - \int_b^a v\frac{du}{dx}\,dx$$

Beispiele:

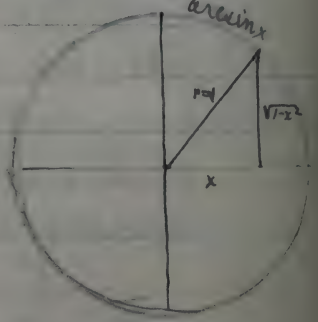
I $$I = \int_b^a x \cdot e^x \, dx = [x \cdot e^x]_b^a - \int_b^a e^x \, dx = [x \cdot e^x]_b^a - [e^x]_b^a$$
$$= (a-1)e^a - (b-1)e^b.$$

II $$I = \int \log x \, dx = x \log x - \int dx = \log x - x.$$

III $$I = \int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int x \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right) dx$$
$$= \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \, dx$$

$$I = \int_0^x \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right)_0^x$$
$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right)$$

Anmerkung: I hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung: Die beiden Bestandteile unseres Ausdruckes repräsentieren den Inhalt des Kreissectors und des Dreiecks.



Capitel II

von der systematischen Berechnung der Integrale.

§10. Eintheilung der Functionen:

1) Ganze rationale Functionen (Polynome)
2) Rationale Functionen.
3) Algebraische " . [explicite und implicite]
4) Exponentialfunction und Logarithmus.
5) Trigonometrische und cyklometrische Functionen.

Anmerkung: In englischen Lehrbüchern ist eine häufige Schreibweise:
$\sin(\sin x) = \sin^2 x$ und dementsprechend
$y = \sin^{-1} x$ statt $y = \arcsin x$
etc.

§11. Allgemeines über rationale Functionen.

1) Ganze rationale Functionen.

$$\int (a + bx + cx^2 + \cdots)\, dx = ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}cx^3 + \cdots + \text{const.}$$

2) Gebrochene rationale Functionen:

$$\frac{\psi_m(x)}{\varphi_n(x)}$$

wobei m und n den Grad des Zählers bezw. Nenners bedeuten soll.

Ist der Grad des Zählers grösser als der Grad des Nenners, so kann man stets eine ganze rationale Funktion abspalten und behält eine rationale Funktion als Rest übrig, bei welcher der Grad des Zählers kleiner als der des Nenners ist:

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = G(x) + \frac{\theta(x)}{\varphi(x)}$$

Für die Integration bedeutet dies:
Die ganze rationale Funktion können wir sofort integrieren, und wir haben uns immer nur mit der Integration solcher rationaler Funktionen zu beschäftigen, bei denen der Grad des Zählers kleiner als der des Nenners ist.

Partialbruchzerlegung

§12. Vorbereitungen zur Partialbruchzerlegung

Die Behandlung der letzgenannten Form setzt eine Zerlegung in Partialbrüche voraus, die eigentlich schon in der Algebra abgehandelt sein müsste.
Im Gebiete der komplexen Grössen lässt

sich ein Polynom n ten Grades allemal in n lineare Factoren zerspalten:

$$\varphi_n(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots(x-\nu).$$

Daraus folgt: Wenn man häufig kürzweg sagt $\varphi_n(x) = 0$ hat n Wurzeln, so ist das nur insofern richtig, als man etwa mehrfach auftretende Wurzeln mit ihrer Multiplicität zählen will.

Theorem von d'Alembert und Gauss.

Anmerkung: Da jede complexe Wurzel auch conjugiert vorkommen muss, so konnte Gauss die complexen Grössen vermeiden, indem er formulierte: dass jedes $\varphi_n(x)$ sich auf reelle Weise in lineare, bezw. quadratische Factoren spalten lässt.

Jetzt gehen wir zur Partialbruchzerlegung über und nehmen an, dass

I. keine mehrfachen Wurzeln auftreten.

II. mehrfache Wurzeln treten auf.

§13 I. Keine mehrfachen Wurzeln.

$$\frac{\Theta(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma} + \cdots\cdots + \frac{N}{x-\nu}.$$

$$\Theta(x) = A(x-\beta)(x-\gamma)\cdots(x-\nu)$$
$$+B(x-\alpha)(x-\gamma)\cdots(x-\nu)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+N(x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\mu)$$

Nun ist $\Theta(x)$ auch höchstens vom $(n-1)$ten Grade, also bekommen wir für die n unbekannten Grössen $A, B, \cdots N$, indem wir die Coefficienten der rechten Seite gleich den entsprechenden der linken setzen, n lineare Gleichungen.

Setzen wir $x=\alpha$, so wird

$$\Theta(\alpha) = A(\alpha-\beta)\cdots(\alpha-\nu).$$

also

$$A = \frac{\Theta(\alpha)}{(\alpha-\beta)\cdots(\alpha-\nu)}$$

so auch

$$B = \frac{\Theta(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\cdots(\beta-\nu)}$$

$\cdots\cdots\cdots$

Da $\Theta(x)$ von der Ordnung $n-1$ und gleich der rechten Seite der obigen Gl. ist für die n Werte $\alpha, \beta \cdots \nu$ von x so ist es der rechten Seite identisch gleich.

Es ist

$$\Theta(x) = \frac{A\,\varphi(x)}{x-\alpha} + \frac{B\,\varphi(x)}{x-\beta} + \cdots + \frac{N\,\varphi(x)}{x-\nu}$$

woraus folgt

$$\Theta(\alpha) = \frac{A \cdot 0}{0} + 0 = A\,\varphi'(\alpha)$$

$$\therefore \quad A = \frac{\Theta(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$$

Es sind also

$$A = \frac{\Theta(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \qquad B = \frac{\Theta(\beta)}{\varphi'(\beta)} \qquad \cdots \qquad N = \frac{\Theta(\nu)}{\varphi'(\nu)}$$

§ 14 II. Es komme eine mehrfache Wurzel vor. Es sei

$$\varphi(x) = (x-\alpha)^\rho (x-\beta)^\sigma (x-\gamma) \cdots$$

so schreibe man:

$$\frac{\Theta(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^\rho} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{\rho-1}} + \cdots + \frac{A_\rho}{x-\alpha}$$
$$+ \frac{B_1}{(x-\beta)^\sigma} + \frac{B_2}{(x-\beta)^{\sigma-1}} + \cdots + \frac{B_\sigma}{x-\beta}$$
$$+ \frac{C}{x-\gamma}$$
$$+ \cdots$$

Die Betrachtung wird uns für eine Doppelwurzel angestellt:

$$\varphi(x) = (x-\alpha)^2 \psi(x)$$

so wird für $x=\alpha$

$$\varphi(x) = 0 \quad \varphi'(x) = 0 \quad \varphi''(x) \neq 0.$$

$x=\alpha$ ist also eine Doppelwurzel von $\varphi(x)=0$, wenn neben $\varphi(x)$ auch $\varphi'(x)$ für $x=\alpha$ verschwindet,

ausserdem aber nicht mehr $\varphi'(x)$.

Die Partialbruchzerlegung geschieht für eine Doppelwurzel folgendermassen:

$$\frac{\Theta(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_2}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \cdots\cdots + \frac{M}{x-\mu}$$

$$\Theta(x) = A_1\psi(x) + A_2(x-\alpha)\psi(x) + (x-\alpha)^2\left[\frac{B\psi(x)}{x-\beta} + \cdots + \frac{M\psi(x)}{x-\mu}\right]$$

Indem wir nun links und rechts nach Potenzen von x ordnen und die Potenzen beider Seiten vergleichen, bekommen wir für die n Unbekannten $A_1, A_2, B, C \cdots M$ gerade n lineare Gleichungen. Wie früher ist

$$B = \frac{\Theta(\beta)}{(\beta-\alpha)^2\cdot\psi'(\beta)} = \frac{\Theta(\beta)}{\varphi'(\beta)}$$

$$C = \quad - \quad -$$

$$- \quad - \quad - \cdots$$

Ebenso ist $A_1 = \frac{\Theta(\alpha)}{\psi(\alpha)}$.

A_2 dagegen fällt aus der Rechnung heraus. Man differenziere:

$$\Theta'(x) = A_1\psi'(x) + A_2\psi(x) + A_2(x-\alpha)\psi'(x) + 2(x-\alpha)\{-\}.$$

wo die letzten Terme alle den Faktor $(x-\alpha)$ enthalten. Für $x=\alpha$ wird dann

$$\Theta'(\alpha) = A_1\psi(\alpha) + A_2\psi(\alpha)$$

$$A_2 = \frac{\psi(\alpha)\,\Theta(\alpha) - \psi'(\alpha)\,\Theta(\alpha)}{[\psi(\alpha)]^2}$$

Die Richtigkeit dieser Bestimmung kann geradeso verifiziert werden wie früher, indem man zeigt, dass die Differenz

$$\Theta(x) - A_1\,\psi(x) - A_2(x-\alpha)\,\psi(x) - - - -$$

identisch verschwindet. Sie stellt nämlich ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades dar, welches die die $n-1$ Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma \cdots \omega$ hat, aber α als Doppelwurzel.

Integration der Partialbrüche für reelle Wurzeln:

$$\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx = A \log(x-\alpha) + C$$

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^2}\,dx = -\frac{A}{x-\alpha} + C$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad .$$

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^\rho}\,dx = -\frac{A}{(\rho-1)(x-\alpha)^{\rho-1}} + C$$

Man erhält also bei der Integration der Partialbrüche entweder Logarithmen, oder selbst wieder rationale Bestandteile.

§ 15.a. Eine Wurzel sei komplex.

1) Verfahren: Man setzt die Permanenz der formalen Gesetze voraus.

2) Verfahren: Ist α komplex, so muss auch das daraus berechnete A komplex sein; es muss also zu A z.B. $\bar{B}$ und dann zu $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$ konjugiert sein.
Fasst man diese beiden Ausdrücke zusammen, so erhält man:

$$\frac{A}{x-\alpha}+\frac{\bar{B}}{x-\beta}=\frac{(A'+iA'')(x-\alpha'+i\alpha'')+(A'-iA'')(x-\alpha'-i\alpha'')}{(x-\alpha'-i\alpha'')(x-\alpha'+i\alpha'')}$$

$$=\frac{2A'(x-\alpha')-2A''\alpha''}{(x-\alpha')^2+\alpha''^2}.$$

Beide imaginäre Bestandteile vereinigen sich also zu einem reellen; Integrieren wir so erhalten wir:

$$\int\frac{2A'(x-\alpha')dx}{(x-\alpha')^2+\alpha''^2}-\int\frac{2\alpha''A''dx}{(x-\alpha')^2+\alpha''^2}=\int_1-\int_2$$

$$=A'\log\left[(x-\alpha')^2+\alpha''^2\right]-2A''\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\alpha'}{\alpha''}\right)$$

Es kann also die Integration ganz im reellen ausgeführt werden.

Anmerkung: Entwickelt man die Formel, unbekummert ob sie reelle oder imaginäre Bestandteile enthält, so erhält man:

$$\int \frac{A'+iA''}{x-\alpha'-i\alpha''}\,dx + \int \frac{A'-iA''}{x-\alpha'+i\alpha''}\,dx = (A'+iA'')\log[x-\alpha'-i\alpha''] + (A'-iA'')\log[x-\alpha'+i\alpha''] + C$$

$$= A'\log[(x-\alpha')^2+\alpha''^2] + iA''\log\frac{x-\alpha'-i\alpha''}{x-\alpha'+i\alpha''} + C.$$

Dieser Ausdruck ist gleich dem in reeller Form erhaltenen:

$$A'\log[(x-\alpha')^2+\alpha''^2] - 2A''\operatorname{arctg}\frac{x-\alpha'}{\alpha''}.$$

Also ist:

$$iA''\log\left(\frac{x-\alpha'-i\alpha''}{x-\alpha'+i\alpha''}\right) + C = -2A''\operatorname{arctg}\frac{x-\alpha'}{\alpha''}$$

Um C zu bestimmen setze $x=\alpha'$:

$$\therefore \quad C = -iA''\log(-1).$$

Also wird

$$-\frac{i}{2}\log\frac{i\alpha''-(x-\alpha')}{i\alpha''+(x-\alpha')} = \operatorname{arctg}\frac{x-\alpha'}{\alpha''}$$

oder wenn man $\frac{x-\alpha'}{\alpha''} = z$ setzt, erhält man die sehr interessante Formel

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz}.$$

§ 156. Es komme eine komplexe Doppelwurzel vor. Dann muss es

$$\frac{A'+iA''}{(x-\alpha'-i\alpha'')^2}+\frac{A'-iA''}{(x-\alpha'+i\alpha'')^2}$$

zu integrieren geben.

1. Verfahren: Glied für Glied.

$$\int + \int = -\frac{A'+iA''}{x-\alpha'-i\alpha''}-\frac{A'-iA''}{x-\alpha'+i\alpha''}=\frac{-2A'(x-\alpha')+2\alpha''A''}{(x-\alpha')^2+\alpha''^2}$$

2. Verfahren: Zusammenziehung der beiden Partialbrüche:

$$\int \frac{2A'\left[(x-\alpha')^2+\alpha''^2\right]-4\alpha''A''(x-\alpha')}{\left[(x-\alpha')^2+\alpha''^2\right]^2}$$

gibt denselben reellen Ausdruck.

Anmerkung: Bei höheren Potenzen im Nenner der Partialbrüche verfährt man genau so.

Integration der algebraischen Functionen.

§ 16. Allgemeines.

Die Lösung beruht auf dem Gedanken, das gegebene Integral in das Integral einer rationalen Function zu verwandeln.

Es ist

$$F(x,y)=0$$

Die Aufgabe ist nun, das Integral einer Function zu berechnen, die selbst aus x und y rational aufgebaut ist, d.h., es ist

$$\int R(x,y)\,dx$$

zu ermitteln.

Dies ist so zu verstehen, dass zu jedem Punkte (x,y) der Curve ein $R(x,y)$ als Wert der zu integrierenden Function gehört, dass jedes dieser $R(x,y)$ mit Δx multipliziert und dann der Limes der Summe aller dieser $R(x,y)\,\Delta x$ berechnet werden soll. Man sagt in diesem Falle: das Integral sei an der algebraischen Curve hinerstreckt. In diesem allgemeinen Sinne aufgefasst, wäre der Gegenstand sehr weitgehend

und bis in die höchsten Gebiete der Functionentheorie führend.
Man nennt diese allgemeinen Integrale: Abel'sche Integrale.
Im allgemeinen kann man also die Integra nicht auf die uns bekannten Functionen zurückführen, sondern auf neue, die Abel'schen Functionen. Wenn es uns aber gelingt, die Curvengleichung $F(x,y)=0$ dadurch identisch zu befriedigen, dass man y und x gleich einer rationalen Function einer Hülfsgrösse λ, also $x=r_1(\lambda)$ und $y=r_2(\lambda)$ setzt, dann verwandelt sich das Abel'sche Integral in das Integral einer rationalen Function von λ von der Form:

$$\int R(r_1(\lambda), r_2(\lambda)) \cdot r_1'(\lambda)\, d\lambda$$

und kann dann nach den bisherigen Regeln ausgewerthet werden.

§17 Rationalmachen des Integranden in einfacheren Beispielen.
Zunächst wählen wir in der zu integrierenden Function $R(x,y)$:

$$y = \sqrt[n]{x^m}$$

wo m und n ganze Zahlen sind.
Man setze $x = \lambda^n$, dann ist

$$y = \lambda^m \,, dx = n\lambda^{n-1} d\lambda$$

Diese einfachste Substitution können wir nun sogleich noch erweitern, wenn uns die Funktionen

$$y = \sqrt[n_1]{x^{m_1}} \,, \quad z = \sqrt[n_2]{x^{m_2}}$$

gegeben sind, wo n_1, n_2, m_1, m_2 ganze Zahlen sind. Wir setzen $x = \lambda^{n_1 n_2}$, dann ist $y = \lambda^{m_1 n_2}$, $z = \lambda^{n_1 m_2}$, $dx = n_1 n_2 \lambda^{n_1 n_2 - 1} d\lambda$.
Durch diese Substitution wird alles rational unter dem Integralzeichen.
Jedoch reicht es aus $x = \lambda^n$ zu setzen, wo n das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen n_1 und n_2 ist.
Beispiel:

$$I = \int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$$

Setze $x = \lambda^6$, so wird

$$I = 6 \int \frac{\lambda^8 + \lambda^5}{\lambda^2 + 1} d\lambda$$

$$= 6 \int (\lambda^6 - \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1) d\lambda + 6 \int \frac{\lambda + 1}{\lambda^2 + 1} d\lambda$$

$$= \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2} x^{\frac{3}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 3\log(1 + x^{\frac{1}{3}}) + 6 \operatorname{arctg} x^{\frac{1}{6}} + C$$

§ 18. Von der Irrationalität $\sqrt{a+bx+cx^2}$:
Allgemeine Ueberlegung.
Wir gehen jetzt zu dem wichtigsten Falle über: Die Gleichung zwischen x und y soll folgende Gestalt haben

$$y = \sqrt{a+bx+cx^2}$$

und es soll folgendes Integral bestimmt werden

$$\int R(x, \sqrt{a+bx+cx^2})\,dx$$

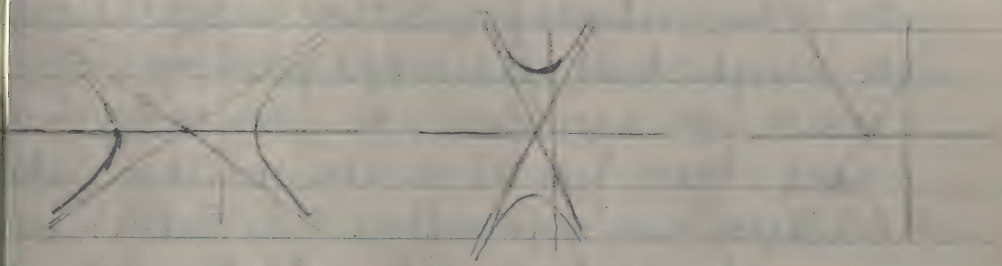
wobei R aus x und y rational aufgebaut sein soll.
Die erste Gl. $y^2 = a+bx+cx^2$ stellt Kegelschnitte dar, die alle symmetrisch zur x-Axe liegen. Hauptunterschied ist, ob $c \gtrless 0$ ist, da für grosse positive oder negative Werte von x, cx^2 die andern Terme überwiegt.
1. Fall $c > 0$: Hyperbel.
Untersuche die Schnittpunkte mit der x-Axe

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2c}$$

und teile ein, je nachdem $b^2-4ac \gtrless 0$.

a) $b^2-4ac>0$ b) $b^2-4ac<0$ c) $b^2-4ac=0$.

2 reelle Schnittpunkte mit x-Axe — 2 imaginäre Schnittpkte mit x-Axe — 1 reeller Schnittpunkt mit x-Axe

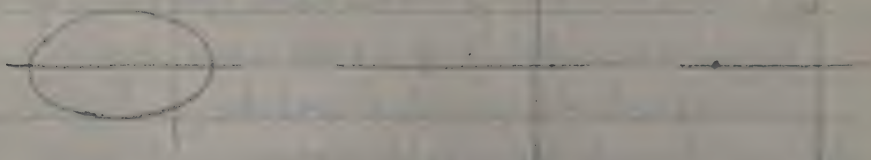


2. Fall: $c<0$: Ellipse

Schnittpunkte mit der x-Axe $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2c}$

a) $b^2-4ac>0$ b) $b^2-4ac<0$ c) $b^2-4ac=0$

2 reelle Schnittpunkte mit x-Axe — 2 imaginäre Schnittpkte mit x-Axe — 1 reeller Sch.pkt. Isolierter Punkt

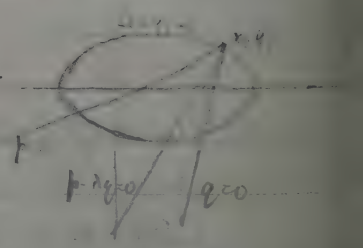


b) und c) fallen für unsere Betrachtung natürlich fort.

3. Fall $c=0$: Parabel

B bleibt ebenfalls bei Seite, weil er sich durch eine direkte Substitution von selbst erledigt:

Ist nämlich $y = \sqrt{a+bx}$, so setze man einfach $ax+b = \lambda^2$ also $x = \frac{\lambda^2 - b}{a}$, $y = \lambda$, $dx = \frac{2\lambda d\lambda}{a}$.
Wir wollen uns jetzt für unsere Aufgabe die Frage überlegen, ob eine Substitution so möglich ist, dass x und y rationale Funktionen von λ werden, und zwar rein geometrisch. Man findet in den meisten Lehrbüchern nie, wie man auf die Substitutionen kommt und doch ist diese Untersuchung so interessant.
Wir denken uns auf irgend einem Kegelschnitt (Ellipse) mit der Gleichung $Q(x,y) = 0$ einen beliebigen Punkt $(x_0\, y_0)$ und legen durch ihn zwei gerade Linien mit den Gleichungen $p(x,y) = 0$, $q(x,y) = 0$.
Dann stellt $p - \lambda q = 0$ eine gerade Linie dar welche durch $(x_0 y_0)$ geht, vorausgesetzt, dass λ eine beliebige Constante ist.



Man bekommt dann für wechselndes λ der Reihe nach die sämtlichen Linien des von $x_0 y_0$ auslaufenden „Büschels".

Wir wollen jetzt die zweiten Schnittpunkte (x,y) dieser Geraden mit der Ellipse berechnen.
x und y müssen Funktionen von λ sein. Wir behaupten jetzt, dass sie rationale Funktionen sind.

$$x = r_1(\lambda) \qquad y = r_2(\lambda)$$

Zunächst wollen wir eine Hilfsbetrachtung einschieben:
Gegeben sei $x^2+mx+n=0$ mit den Wurzeln x_0 und x_1, dann können wir die Gl. in der Form schreiben $(x-x_0)(x-x_1)=0$ und sehen zugleich dass

$$m = -x_0-x_1 \qquad n = x_0 \cdot x_1$$

ist. Nehmen wir an x_0 sei bekannt, so können wir aus den letzten Formeln sofort die zweite Wurzel x_1 berechnen, ohne dass etwa Quadratwurzeln benutzt werden, also rational.

$$x_1 = -m-x_0 \quad , \quad x_1 = \frac{n}{x_0} .$$

Von diesem allgemeinen Prinzipe machen wir jetzt bei unserer geometrischen Aufgabe Anwendung.

Wir hatten die Schnittpunkte des Kegelschnittes $\Omega = 0$ mit der Geraden $p - \lambda q = 0$ zu bestimmen. Zu dem Zwecke eliminieren wir y. Die Coefficienten der so erhaltenen quadratischen Gleichung in x werden dabei rationale Functionen von λ, die wir mit $m(\lambda)$ und $n(\lambda)$ bezeichnen wollen.
Wir erhalten also

$$x^2 + m(\lambda)\, x + n(\lambda) = 0$$

Ebenso durch Elimination von x erhalten wir in y eine quadratische Gleichung:

$$y^2 + m'(\lambda)\, y + n'(\lambda) = 0.$$

Nun sind aber bei den beiden Gleichungen je eine Wurzel x_0 bezw. y_0 bekannt. Also berechnet sich die gewünschte andere x und y rational in λ.
Kehren wir zu unserer ursprünglichen Function zurück. Es war

$$y^2 = a + bx + cx^2$$

Betrachten wir den Fall, wo $c > 0$ ist, so erhielten wir für $b^2 - 4ac = 0$ ein Linienpaar. Dieser Fall ist für uns bedeutungslos. Es ist dann nämlich

$y = \sqrt{\frac{b^2}{4c} + bx + cx^2} = \pm\frac{b}{2\sqrt{c}} \pm \sqrt{c}\cdot x$

von vornherein eine reelle Funktion.
Wir betrachten also nur die Fälle, wo
$b^2 - 4ac \geq 0$ für $c > 0$ ist.
Wir haben jetzt einen Punkt als Centrum für das Strahlbüschel auf der Hyperbel zu wählen. Man könnte natürlich einen beliebigen Punkt derselben nehmen, jedoch ist es zweckmässig nach einer der folgenden drei Methoden zu verfahren.

§ 19. Fortsetzung: Die formelle Durchführung, Beispiele.

Bei der 1ten Methode soll der Mittelpunkt des Strahlenbüschels x_0, y_0 im Unendlichen liegen (auf der Hyperbel). Die hierdurch gehende Gerade, die ausserdem noch durch den Coordinatenanfangspunkt geht, hat die Gleichung

$$y = \pm\sqrt{c}\, x$$

Sie ist || einer Asymptote. Wir betrachten nur $y = +\sqrt{c}\cdot x$. Alle zu ihr Parallelen

stellen ein Strahlenbüschel $p-\lambda q$ vor. Die Gl. der Linien desselben ist

$$y = v\bar{c}\, x + \lambda$$

Damit schneiden wir unseren Kegelschnitt

$$y^2 = a + bx + cx^2$$

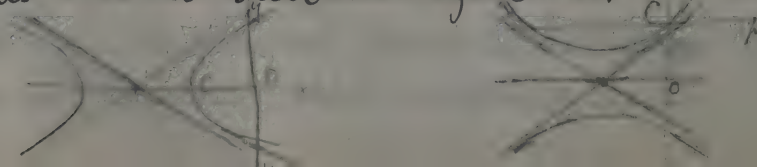
und bestimmen die Coordinaten der Schnittpuncte.

$$cx^2 + 2v\bar{c}\lambda x + \lambda^2 = a + bx + cx^2$$

Eine Wurzel muss ∞ werden, was sich darin zeigt, dass sich die quadratischen Glieder wegheben. In der That erhalten wir den anderen Wert von x (y) als rationale Function von λ.

$$x = \frac{a-\lambda^2}{2v\bar{c}\lambda - b} \qquad y = \frac{v\bar{c}\lambda^2 - b\lambda + av\bar{c}}{2v\bar{c}\lambda - b} \qquad dx =$$

Die 2te bezw. 3te Methode benutzt als Centrum des Strahlbüschels einen der reellen Schnittpuncte des Kegelschnittes mit der x- bezw. y-axe wie aus den Figg. hervorgeht, wo C das Centrum des Strahlenbüschels bezeichnet.



Die reellen Schnittpunkte der Hyperbel mit den Axen haben bezw. die Coordinaten

2) $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$ $\qquad y = 0$

3) $x = 0$ $\qquad y = \sqrt{a}$

Wir wollen hier nur den Fall 3) betrachten. Die Gleichungen der beiden Geraden, die wir durch C legen, haben die Gleichungen:

$(g): x = 0 \qquad (f): y - \sqrt{a} = 0$

Die Gl. des Strahlenbüschels ist also $y - \sqrt{a} = \lambda x$. Eliminieren wir mittels dieser Gl. und der des Kegelschnittes $y^2 = a + bx + cx^2$ das y, so wird:

$$a + 2\sqrt{a}\lambda x + \lambda^2 x^2 = a + bx + cx^2$$

oder

$$x^2(\lambda^2 - c) + x(2\sqrt{a}\lambda - b) = 0$$

Die eine Wurzel ist $= 0$; die andere ergibt die Abscisse des gesuchten zweiten Schnittpunktes als rationale Function von λ

$$x = \frac{b - 2\sqrt{a}\lambda}{\lambda^2 - c} \quad ; \quad dx = \frac{2(\sqrt{a}\cdot c - b\lambda + \sqrt{a}\cdot\lambda^2)}{(\lambda^2 - c)^2}\, d\lambda$$

und ferner

$$y = \frac{-c\sqrt{a} + b\lambda - \sqrt{a}\lambda^2}{\lambda^2 - c} \qquad \text{u. s. w.}$$

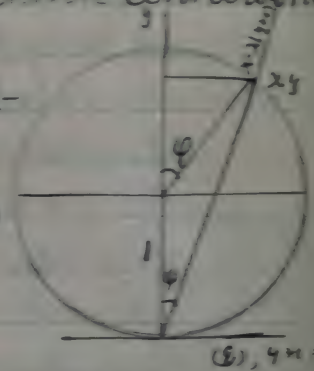
Dies sind nur Beispiele für das Prinzip. Näheres siehe in den Lehrbüchern.

Es folge nur noch ein Beispiel.

Wie gross ist

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Wir wissen, dass $I = \arcsin x$ ist, und wollen uns nur überzeugen, dass die neue Methode auch zum Ziele führt. Wir haben hier den Fall $c<0$. Wir stellen uns den Kegelschnitt $y = \sqrt{1-x^2}$ in einer Figur dar und erhalten einen Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt im Coordinatenanfangspkt. Setzen wir $\arcsin x = \varphi$, so ist φ der in der Fig. bezeichnete Centriwinkel. Es ist also $x = \sin\varphi$ $y = \cos\varphi$.



Wir wählen jetzt als Mittelpunkt unseres Strahlenbüschels den Punkt $(x=0, y=-1)$ und legen durch ihn zwei Gerade mit den Gl^en:

(I) $x = 0$ (II) $y + 1 = 0$

Die Gl des Strahlenbüschels lautet dann etwa

$$x = \lambda(y+1)$$

Ausser dem Punkte $(x=0, y=-1)$ hat diese Gerade mit dem Kreise $x^2 + y^2 - 1 = 0$ noch den Schnittpunkt

$$x = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \qquad y = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

Dies in unser Integral eingesetzt gibt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{2\,d\lambda}{1+\lambda^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,\lambda + C.$$

Lassen wir x von 0 bis x laufen, so läuft λ von 0 bis λ. Es wird

$$2\int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,\lambda.$$

Setzen wir $\mathrm{arctg}\,\lambda = \psi$, so haben wir:

$$I = \arcsin x = \varphi = 2\,\mathrm{arctg}\,\lambda = 2\psi.$$

Was bedeutet nun ψ in der Fig. und wie tritt λ in Evidenz?

Es ist $x = \lambda(y+1)$, also $\lambda = \frac{x}{y+1}$ und wir sehen in unserer Figur dass in dem Dreieck die horizontale Kathete $= x$ die vertikale $= y+1$ ist. d. h.

$$\lambda = \mathrm{tg}\,\psi; \quad \psi = \mathrm{arctg}\,\lambda$$

Da $\varphi = 2\psi$, so wird $\lambda = \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$.

Unsere Substitution läuft demnach auf den bekannten Satz hinaus, dass der Peripheriewinkel im Kreise halb so gross ist, wie der Centriwinkel auf gleichem Bogen.

§ 20. Integration trigonometrischer Funktionen

$$I = \int R(\sin\varphi, \cos\varphi)\, d\varphi$$

wo R eine rationale Funktion ist.

$$\therefore \quad I = \int R\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

wo $\cos\varphi = x$.

Wir brauchen jetzt nur die im letzten Beispiele benutzte Beziehung zwischen φ und λ anzuwenden, nämlich: $\lambda = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ so wird unser Ausdruck rational. Dadurch wird:

$$\sin\varphi = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \qquad \cos\varphi = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \qquad d\varphi = \frac{1-\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\lambda\, d\lambda$$

Diese Methode ist aber nicht immer zweckmässig; sehr häufig führt auch die teilweise Integration zum Ziele.

Beispiel

$$I = \int \sin^m\varphi\, d\varphi = -\int \sin^{m-1}\varphi\, d\cos\varphi$$

$$= -\sin^{m-1}\varphi \cdot \cos\varphi + (m-1)\int \cos^2\varphi \sin^{m-2}\varphi\, d\varphi$$

$$= -\sin^{m-1}\varphi\cos\varphi + (m-1)\int \sin^{m-2}\varphi\, d\varphi - (m-1)I$$

$$m\int \sin^m\varphi\, d\varphi = -\sin^{m-1}\varphi\cos\varphi + (m-1)\int \sin^{m-2}\varphi\, d\varphi$$

1ter Fall, m gerade:

$$\int \sin^m\varphi\, d\varphi = -\frac{\cos\varphi}{m}\left\{\sin^{m-1}\varphi + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3}\varphi + \cdots + \frac{(m-1)(m-3)\cdots 3\cdot 1}{m(m-2)\cdots 2}\cdot\varphi\right.$$

2ter Fall, m ungerade:

$$\int \sin^m \varphi \, d\varphi = -\frac{\cos\varphi}{m}\left\{\sin^{m-1}\varphi + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3}\varphi + \cdots + \frac{(m-1)\cdots 4\cdot 2}{(m-2)\cdots 3\cdot 1}\right\} +$$

Für ähnliche Beispiele siehe Lehrbücher.

§ 21 Integration einiger wichtiger transcendenter Funktionen.

Behandle diese durch Kunstgriffe!

Beispiel

$$I = \int x^m e^{nx}\,dx = \frac{e^{nx}}{n}\left\{x^m - \frac{m}{n}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{n^2}x^{m-2} + \cdots\right\} + C$$

durch partielle Integration.

Setze $n = a + ib$, dann wird

$$I = \int x^m e^{ax}\cos bx\,dx + i\int x^m e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$= \frac{e^{ax}e^{ibx}}{a+ib}\left\{x^m - \frac{m}{a+ib}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{(a+ib)^2}x^{m-2} + \cdots\right\} + C$$

Setze $a + ib = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \rho e^{i\alpha}$, dann wird

$$I = \frac{e^{ax}}{\rho}\left\{e^{i(bx-\alpha)}x^m - \frac{m}{\rho}e^{i(bx-2\alpha)}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{\rho^2}e^{i(bx-3\alpha)}x^{m-2} \cdots\right.$$

$$\int x^m e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)\,dx = \frac{e^{ax}x^m}{\rho}(\cos(bx-\alpha) + i\sin(bx-\alpha))$$

$$- \frac{m e^{ax}x^{m-1}}{\rho^2}(\cos(bx-2\alpha) + i\sin(bx-2\alpha))$$

$$+ \frac{m(m-1)e^{ax}x^{m-2}}{\rho^3}(\cos(bx-3\alpha) + i\sin(bx-3\alpha)$$

$$+ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

Durch Trennung der reellen und imaginären Teile

$$\int x^m e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}x^m\cos(bx-\alpha)}{\rho} - \frac{m e^{ax}x^{m-1}\cos(bx-2\alpha)}{\rho^2} + \cdots$$

§ 22 Ein Integral definiert eventuell eine neue Function.

1) Elliptische Integrale: z. B.

$$\int^{x} \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}}$$

2) Hyperelliptische Integrale: z. B.

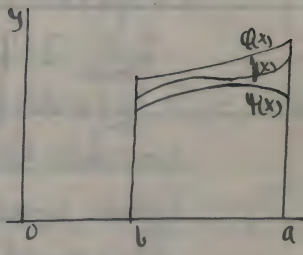
$\int \frac{dx}{y}$ wo $y = \sqrt{a+bx+cx^2+\cdots+Kx^n}$

3) Abel'sche Integrale.

Capitel III

von der praktischen Berechnung der Integrale.

§ 23. Erste Abschätzung eines Integrals durch Mittelwertsatz.



Aus der Figur ist ersichtlich, dass bei Stetigkeit von $f(x)$ es immer gibt:

$$\varphi(x) \geqq f(x) \geqq \psi(x)$$

und also:

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx \geqq \int_0^a f(x)\,dx \geqq \int_0^a \psi(x)\,dx.$$

Nach dieser Formel kann man sehr häufig ein Integral abschätzen:

Beispiel: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$

Hier ist im Integrationsintervalle

$$1 \geqq 1-x^3 \geqq 1-x^2$$

$$\sqrt{1} \geqq \sqrt{1-x^3} \geqq \sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Daraus folgt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$0{,}5 < I < \arcsin \tfrac{1}{2} = \tfrac{\pi}{6}$$

$$0{,}5 < I < 0{,}5236\ldots$$

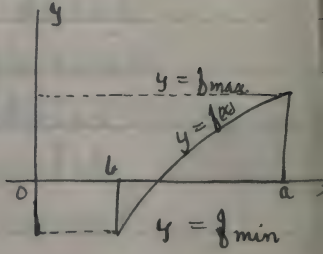
Specieller Fall dieser Abschätzung:

Es gilt:

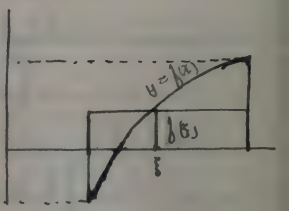
$$f_{max.}(x) \geqq f(x) \geqq f_{min}(x)$$

$$f_{max.}(a-b) \geqq \int_b^a f(x)\,dx \geqq f_{min.}(a-b)$$

wo die Gleichheitszeichen nur gelten, wenn f eine Constante ist.



Es wird nun ein f_m gegeben, das mit $(a-b)$ multipliziert denselben Flächeninhalt hat, wie der durch die Curve begrenzte. Also folgt der



<u>Mittelwertsatz</u>

$$\int_b^a f(x)\,dx = f(\xi)(a-b).$$

Soll die Function $u(x) \cdot v(x)$ integriert werden wo $v(x)$ im Intervall konstantes Vorzeichen hat z. B. positiv, so kann man ansetzen:

$$u_{max} \cdot v(x) \geqq f(x) \geqq u_{min} \cdot v(x)$$

$$u_{max} \cdot \int_b^a v(x)\,dx > \int_b^a u(x) \cdot v(x)\,dx > u_{min} \cdot \int_b^a v(x)\,dx$$

Daraus folgt der <u>erweiterte Mittelwertsatz</u>:

$$\int_b^a u(x)\,v(x)\,dx = u(\xi) \int_b^a v(x)\,dx$$

§ 24. Revision des Taylor'schen Satzes.

1. Frage: Wie kommt man dazu, irgend-eine Function mit einer Reihe à la Tayl zu vergleichen?

Antwort: Siehe Klein, Diff. Rech. Schmiegungs-parabeln.

2. Frage: Wie schätzt man den Rest $R(x,a)$ a

Antwort: Definition des Restes:

$$R(x,a) = f(x) - f(a) - f'(a)\frac{x-a}{1} - \cdots - f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{n-1!}$$

Es sei jetzt a die Variable, dann ist

$$\frac{dR}{da} = -f'(a) - f''(a)\frac{x-a}{1} + f'(a) - 2f''(a)\frac{(x-a)}{1\cdot 2} + \cdots - f^{(n)}(a)\frac{x-}{n}$$

Also ist:

$$R(x,a) = -\int_x^a f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{n-1!}da$$

Wir nehmen $a = x$ als untere Grenze, weil hierfür Definitionsmässig der Rest verschwindet.

Auf diese Form des Restes wollen wir jetzt den erweiterten Mittelwertsatz anwenden. Für $(x-a)^{n-1}$ setzen wir $v(x)$, dann ist

$$R(x,a) = -\frac{f^{(n)}(\xi)}{n-1!}\cdot\int_x^a (x-a)^{n-1}da = \frac{f^{n}(\xi)(x-a)^n}{n!}$$

wo ξ ein Mittelwert zwischen x und a bedeutet.

Anmerkung: Dies ist die bequemste Form des Restes. Man erhält andere Formen, wenn man $v(x) = (x-a)^k$ wählt, wo $k = 0, 1, \cdots (n-1)$.

§25: Beurteilung von Integralen durch den Taylor'schen Satz.

$$\int f(x)\,dx = C + f(a)(x-a) + f'(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int \frac{(x-a)^n \cdot f^{(n)}(\xi)}{n!}\,dx$$

wo das letzte Integral abgeschätzt werden muss. a ist constant an beliebiger Stelle, also wählen wir zweckmässig die Abscisse des linken Endpunktes des Curvenbogens, so dass $(x-a)^n$ stets positiv. Also kann der erweiterte Mittelwertsatz angewendet werden

$$\int (\text{Restglied})\,dx = \int \frac{(x-a)^n f^{(n)}(\xi)\,dx}{n!} = \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}\int (x-a)^n\,dx$$
$$= \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}\,\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Dieses ist also ein Mittel, ein Integral numerisch auszuwerten. Doch muss das Integral des Restgliedes gegen 0 convergieren. Es folgt als numerisches Beispiel berechnet

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0{,}50826$$

§ 26. Wesen der allgemeinen parabolischen Interpolation. Zusammenhang mit den Partialbrüchen.

Die Methode der Schmiegungsparabeln (bei Taylor) kann man verallgemeinern indem man verlangt eine Parabel zu bestimmen, die sich an mehreren Stellen $x = \alpha, \beta, \gamma \ldots \nu$ an die gegebene Curve anschliesst, sei es dass sie nur durch diese Puncte hindurchgeht, sei es dass sie in noch innigerer Beziehung zu der Curve steht, indem sie in diesen Puncten auch noch Diff. quotienten mit der Curve gemein hat.

Diese Entwickelung gestattet Interpolation, während die Taylorsche nur Extrapolation.

Bleiben zunächst die Diff. quotienten ausser Betracht und sind uns die n Ordinaten $x = \alpha, \beta, \ldots \nu$ gegeben in den die Parabel mit der Curve übereinstimmen soll, so ist die Aufgabe durch unsere Partialbruchzerlegung bereits gelöst.

Ist $\varphi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\nu)$ so war

$$\Theta(x) = \Theta(\alpha)\frac{\varphi(x)}{\varphi'(\alpha)(x-\alpha)} + \cdots\cdots + \Theta(\nu)\frac{\varphi(x)}{\varphi'(\nu)(x-\nu)}.$$

Bei uns liegt nun folgendes vor: Die $\Theta(\alpha), \Theta(\beta)$ sind von vornherein gegeben und die Aufgabe lautet, $\Theta(x)$ zu berechnen. Dies wird augenscheinlich durch die vorstehende Formel geleistet. Sie führt den Name

Lagrange'sche Interpolationsformel.

Sind für die gegebenen Abscissenwerte nicht nur die Ordinaten, sondern auch eine Anzahl von Diff. quotienten vorgeschrieben, so wird die Berechnung der zugehörigen Parabel minderster Ordnung, die alle diese Ordinaten und Diff. quotienten hat, gerade auch durch die Partialbruchformel geleistet, während man nur die vorgeschriebenen Wurzeln von $\varphi(x)$ (die $\alpha\ \beta\cdots\nu$) mit der richtigen Multiplizität einführt.

Im Falle der Taylor'schen Entwicklung hat man

$$\Theta(x) = \Theta(\alpha) + \frac{\Theta'(\alpha)}{1}(x-\alpha) + \frac{\Theta''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{\Theta^{(n-1)}(\alpha)}{n-1!}(x-\alpha)^{n-1}$$

als Gleichung der Schmiegungsparabel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Dividieren wir sämtliche Glieder

durch $(x-\alpha)^n$, so erhalten wir die Partialbruchzerlegung für den Fall, dass alle n Wurzeln von $\Phi(x)$ gleich α sind:

$$\frac{\Theta(x)}{(x-\alpha)^n} = \frac{\Theta(\alpha)}{(x-\alpha)^n} + \frac{\Theta'(\alpha)}{(x-\alpha)^{n-1}} + \cdots + \frac{\Theta^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!\,(x-\alpha)}$$

Die Taylor'sche Reihe ist also der Fall der Lagrange'schen Interpolationsformel, bei welchem alle Wurzeln zusammenrücken. Es erübrigt für diese Entwicklung ein

§ 27. Allgemeine Restbetrachtung.

Zur Anwendung kommt das Rolle'sche Theorem, das zunächst steigen möge:

Es war

$$\int_a^a f(x)\,dx = f(\xi)(a-b)$$

Diesen Satz kann man auch als Satz der Diff. Rechnung aussprechen, indem man

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

setzt. Man erhält:

$$F(a) - F(b) = F'(\xi)(a-b) \quad \text{oder}$$

$$\frac{F(a)-F(b)}{a-b} = F'(\xi)$$

d.h. aber: Es gibt auf einem Curvenstück, das von einer Sehne abgeschnitten wird, immer mindestens einen Punkt, das

Tangente der Sehne parallel ist.
Der Satz ist nichts weiter, als der Mittelwert-
satz, nur dass wir als Curve die Integralcur
benutzt haben, wodurch in der Formel an
Stelle der Ordinate der 1te Diff. Quotient
getreten ist.

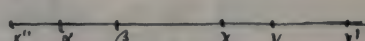
Verschwindet $F(x)$ für $x=a$ und $x=b$ so erhal
wir das Corollar des Rolle'schen Satzes:
Verschwindet eine Function an zwei Stell
so liegt dazwischen sicher ein Verschwind-
ungspunkt des Diff. quotients. Wir können
das auch folgendermassen ausdrücken:
Hat die Gl. $F(x)=0$ in einem Intervalle zwei
Wurzeln, so hat $F(x)=0$ in dem Intervalle
mindestens eine Wurzel.
Allgemein gilt: Hat eine Function, die
hinreichend viele Diff. quotienten besitzt,
in einem Intervalle $(n+1)$ Wurzeln, dann hat
in demselben Intervalle der nte Diff. quotient
mindestens eine Wurzel.
Wir kehren jetzt zurück zu unserer
Restbetrachtung. Es war $f(x) = \Theta(x) + R$ wo
$R = \Phi(x) \cdot r(x)$. Daraus wird $r(x) = \frac{f(x) - \Theta(x)}{\Phi(x)}$.

Führen wir rechts eine Variable z ein, so wir

$$F(z) = f(z) - \Theta(z) - r(x)\,\varphi(z) = 0$$

Diese Gl. hat n+1 Wurzeln, nämlich $z = x$, ausserdem verschwindet dieser Ausdruck für $x = \alpha, \beta, \dots \nu$.

Also muss der nte Diff. quotient $F(z)$ im Intervalle α bis ν oder α bis x' oder x'' bis ν



einen Wert 0 annehmen. Es muss also sein $F^{(n)}(\xi) = 0$. Bilden wir ihn:

$$F^{(n)}(z) = f^{(n)}(z) - 0 - r(x)\,n!$$

($\Theta(z)$ war nämlich ein Polynom (n-1)ten Grades von z, sein nter Diff. quotient wird also = 0; und $\varphi(z)$ war von der Form $z^n + A z^{n-1} + \dots$)

Für $z = \xi$ erhalten wir also:

$$f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - r(x)\,n! = 0$$

Also wird

$$r(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \qquad R = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,\varphi(x).$$

Also hat die Lagrange'sche Interpolationsformel die Gestalt:

$$f(x) = \Theta(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\cdot\varphi(x)$$

Das ist genau das, was wir im Taylor'schen Satze haben. Zuerst n Glieder $\Theta(x)$ und dann das Restglied

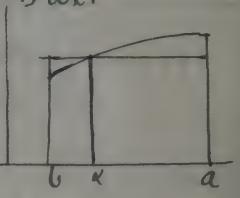
nur wenn dort das $\varphi(x) = (x-\alpha)^n$, weil alle Ordinaten in eine zusammenfallen.
Obige Formel soll nun noch spezialisiert werden für $n=1$ bis $n=4$.

§28. Die Rechtecksformel.

Ist $n=1$, also α allein gegeben, so erhält man eine Parabel 0ter Ordnung für die Interpolationscurve: $y = f(x) = f(\alpha) + R$, wo $R = \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\alpha)$.
Der gesuchte Flächeninhalt ist also durch das Integral bestimmt:

$$\int_b^a f(x)\,dx = f(\alpha)\int_b^a dx + \int_b^a \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\alpha)\,dx \qquad \text{d. h.}$$
$$= f(\alpha)(a-b) + \int_b^a f'(\xi)(x-\alpha)\,dx.$$

Es soll das Integral des früheren Restes abgeschätzt werden!
Da aber $x-\alpha$ im Intervalle b bis a nicht constantes Vorzeichen hat, so kann der allgemeine Mittelwertsatz nicht angewendet werden.



Wo aber wählen wir α zweckmässig $= \frac{a+b}{2}$.
Es wird also $f(x) = f(\frac{a+b}{2}) + r(x)\cdot(x - \frac{a+b}{2})$.
Spalten wir $r(x)$ so wird $r(x)$ etwa $= K + s(x)(x - \frac{a+b}{2})$
K ist dabei der Wert, den $f'(x)$ für $x = \frac{a+b}{2}$ hat.

Wir haben jetzt:

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + k\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + s(x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

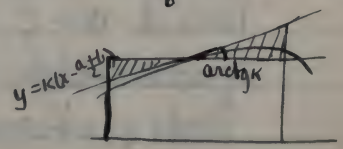
Die Aufgabe ist jetzt $s(x)$ abzuschätzen.
Es ist sofort

$$s(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}$$

wo ξ zwischen $\frac{a+b}{2}$ und x liegt.
Obige Gl. integriert gibt:

$$\int_b^a f(x)\,dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(a-b) + \int_b^a k\left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx + \int_b^a \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

Aus der Fig. sieht man, dass
das 1te Integral = 0 wird:



Wendet man nun auf das zweite Integral
den erweiterten Mittelwertsatz an, so erhält m

$$\int_b^a f(x)\,dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(a-b) + \frac{f''(\xi)}{2}\int_b^a \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx.$$

Um die Integration auszuführen, setze man

$$x - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}\cdot z \qquad dx = \frac{a-b}{2}\,dz$$

Die Grenzen werden $z = 1$ $z = -1$ resp. für $x = a$, $x =$

Also:

$$\int_b^a \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \left(\frac{a-b}{2}\right)^3 \int_{-1}^{+1} z^2\,dz = \frac{2}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3$$

Man erhält als spezielle Rechteckformel

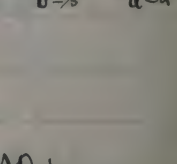
I. $$\int_b^a f(x)\,dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(a-b) + \frac{f''(\xi_2)}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3$$

Anmerkung: Die ganze Ableitung dieser
Formel lässt sich natürlich auch so darstell

dass man nicht die Parabel 0ter Ordnung $y = f(\frac{a+b}{2})$, sondern die Parabel 1ter Ordnung $y = f(\frac{a+b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2}) f'(\frac{a+b}{2})$ d.h. die Tangente im Punkte $x = \frac{a+b}{2}$ zur Interpolation anwendet. Insofern ist unsere Formel zugleich eine spezielle Trapezformel".

§ 29. Methode des Trapezes.

Wird $n = 2$, ist also $x = \alpha$ und $x = \beta$ gegeben und zwar sollen dieselben an den Enden des Integrationsintervalles liegen, dann haben wir eine Parabel 1ter Ordnung zu bestimmen d.h. die in der Fig. gezeichnete gerade Linie.



Wir bilden den Ausdruck:

$$f(x) = f(a)\left(\frac{x-b}{a-b}\right) + f(b)\frac{x-a}{b-a} + r(x)(x-a)(x-b)$$

wo $r(x) = \frac{1}{2}f''(\xi_1)$ ist.

Durch Integration haben wir also:

$$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{f(a)}{a-b}\int_b^a (x-b)\,dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_b^a (x-a)\,dx + \int \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)\,dx$$

Das gibt nach dem erweiterten Mittelwertsatz

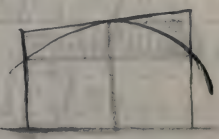
$$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{f(a)}{a-b}\int_b^a (x-b)\,dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_b^a (x-a)\,dx + f''(\xi)\int_b^a (x-a)(x-b)\,dx$$

$$= \frac{f(a)}{2}\,\frac{a-b}{2}\int_{-1}^{+1}(z+1)\,dz - \frac{f(b)}{2}\,\frac{a-b}{2}\int_{-1}^{+1}(z-1)\,dz + \frac{f''(\xi)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3\int_{-1}^{+1}(z^2-1)\,d$$

wo $x - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}\cdot z$.

Wir erhalten dann als Trapezformel

II. $\int_b^a f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(a-b) - \frac{2}{3} f''(\xi)\left(\frac{a-b}{2}\right)^3$



Daraus ergibt sich: Das jetzt betrachtete Trapez ergibt einen doppelt so grossen Fehler, als das mittlere Rechteck. Ausserdem sind die Fehler von verschiedenem Vorzeichen (siehe Fig.).

§ 20. Methode der gewöhnlichen parabolischen Interpolation.

Wird $n = 3$, ist also $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$ (Anfang, Ende, Mitte) gegeben, so interpolieren wir mit einer Parabel 2ter Ordnung von der Form

$$y = A + Bx + Cx^2$$

Es wird

$$f(x) = 2f(a)\frac{(x-b)(x-\frac{a+b}{2})}{(a-b)^2} + 2f(b)\frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{(a-b)^2}$$
$$- 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(a-b)^2} + R$$

wo $R = r(x)(x-a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2})$ gesetzt wird.

Wenn $r(x)$ gespalten wird in $k + s(x)(x-\frac{a+b}{2})$ so wird

$$R = k(x-a)(x-b)(x-\tfrac{a+b}{2}) + s(x)(x-a)(x-b)(x-\tfrac{a+b}{2})^2$$
$$= k(x-a)(x-b)(x-\tfrac{a+b}{2}) + \frac{f^{III}(\xi)}{24}(x-a)(x-b)(x-\tfrac{a+b}{2})^2$$

wenn $s(x)$ abgeschätzt wird.

Das Glied mit K fällt wieder heraus.
Integriert ergibt sich:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{2f(a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2})}{(a-b)^2}\,dx + \int_a^b \frac{2f(b)(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{(a-b)^2}\,dx$$
$$- \int_a^b 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\frac{(x-a)(x-b)}{(a-b)^2}\,dx + K\int_a^b (x-a)(x-b)(x-\tfrac{a+b}{2})\,dx$$
$$+ \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\int_a^b (x-a)(x-b)(x-\tfrac{a+b}{2})^2\,dx$$

(Das letzte Glied ist durch abermalige Anwendung des Mittelwertsatzes richtig)

Setze man $x - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}\cdot z$ so wird

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{2f(a)}{(a-b)^2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3\int_{-1}^{+1}(z^2+z)\,dz - \frac{4f(\frac{a+b}{2})}{(a-b)^2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3\int_{-1}^{+1}(z^2-1)\,dz$$
$$+ \frac{2f(b)}{(a-b)^2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3\int_{-1}^{+1}(z^2-z)\,dz + K\left(\frac{a-b}{2}\right)^4\int_{-1}^{+1}(z^3-z)\,dz + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\left(\frac{a-b}{2}\right)^5\int_{-1}^{+1}(z^4-z^2)\,dz.$$
$$= \frac{2f(a)}{(a-b)^2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3\cdot\frac{2}{3} + \frac{2f(b)}{(a-b)^2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3\cdot\frac{2}{3} - \frac{4f(\frac{a+b}{2})}{(a-b)^2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3(-\tfrac{4}{3})$$
$$+0 - \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\left(\frac{a-b}{2}\right)^5(-\tfrac{4}{15}).$$

Dies gibt die gewöhnliche parabolische Interpolationsformel:

III $$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)}{6}(a-b) - \frac{f^{(4)}(\xi)}{90}\left(\frac{a-b}{2}\right)^5.$$

Anmerkung: Wiederum kann man sagen, dass dieser Formel im Grunde eine Parabel 3ter Ordnung zu Grunde gelegt ist, nämlich diejenige, welche $y = f(x)$ bei $x = a$ und $x = b$ schneidet und bei $x = \frac{a+b}{2}$ berührt. Von hier aus versteht man besser, weshalb diese Formel III einen kleineren Fehler gibt, als die jetzt abzuleitende Formel 4.

§ 31. Interpolation durch Grenzparabel 3ter Ordnung.

Wird $n=4$, so legen wir jetzt eine Parabel durch 4 Punkte der Curve und zwar sollen an den beiden Enden des Intervalles je zwei zusammenfallen, d. h. es sollen an den Endpunkten noch die erste Diff. quotienten übereinstimmen. Wir benutzen also die Partialbruchformel mit zwei Doppelwurzeln

$$f(x) = f(a)\frac{(x-b)^2}{(a-b)^2} + [(a-b)f'(a) - 2f(a)]\frac{(x-a)(x-b)^2}{(a-b)^3} + f(b)\frac{(x-a)^2}{(a-b)^2}$$
$$+[(b-a)f'(b) - 2f(b)]\frac{(x-a)^2(x-b)}{(b-a)^3} + R$$

wo $R = r(x)(x-a)^2(x-b)^2$ gesetzt werden kann.

Wir schätzen $r(x)$ wieder ab und haben:

$$R = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-a)^2(x-b)^2.$$

Durch Integration ergibt sich der Flächeninhalt:

$$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{f(b)}{4\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}\int_b^a (x-a)^2\,dx + \frac{(a-b)f'(b)+2f(b)}{8\left(\frac{a-b}{2}\right)^3}\int_b^a (x-b)(x-a)^2\,dx$$
$$+ \frac{f(a)}{4\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}\int_b^a (x-b)^2\,dx + \frac{(a-b)f'(a)-2f(a)}{8\left(\frac{a-b}{2}\right)^3}\int_b^a (x-a)(x-b)^2\,dx$$
$$+ \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\int_b^a (x-a)^2(x-b)^2\,dx.$$

Durch die bekannte Substitution erhalten wir:

$$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{a-b}{4} f(b) \int_{-1}^{+1} (z-1)^2\,dz + \frac{a-b}{2}\left[(a-b) f'(b) + 2 f(b)\right] \int_{-1}^{+1} (z-1)^2 (z+1)\,dz$$

$$+ \frac{a-b}{4} f(a) \int_{-1}^{+1} (z+1)^2\,dz + \frac{a-b}{2}\left[(a-b) f'(a) - 2 f(a)\right] \int_{-1}^{+1} (z-1)(z+1)^2\,dz$$

$$+ \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \left(\frac{a-b}{2}\right)^5 \int_{-1}^{+1} (z^2-1)^2\,dz.$$

Wir erhalten also als Formel für die Interpolation mit Parabel 3ter Ordnung:

$$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(a-b) + \frac{f'(b)-f'(a)}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \frac{2}{45} f^{(4)}(\xi)\left(\frac{a-b}{2}\right)^5.$$

Anmerkung: Die Reste der Formel III und IV differiren erstens durch das Vorzeichen und dann ist noch der Rest bei IV vier mal so gross als bei III.

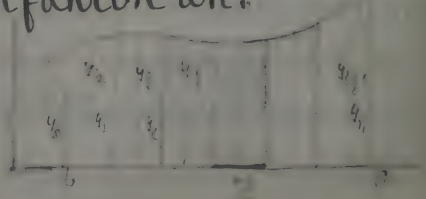
§ 32. Abteilungsweise Benutzung der niederen Interpolationsformeln.

Anstatt bei grossen Intervallen durch Parabeln höherer Ordnung zu interpoliren, kann man auch folgendermassen verfahren.

Wir teilen unser Intervall in n gleiche Teile und wenden auf die entstandenen Abteilungen unser Verfahren an.

Zunächst Formel I auf den ersten Streifen.

Sein Inhalt ist:



$$\int_b f(x)\,dx = y_{\frac{1}{2}}\left(a-\frac{b}{n}\right) + \frac{f''(\xi_1)}{24}\left(\frac{a-b}{n}\right)^3$$

und als Integral der gesamten Fläche erhalten wir:

$$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{a-b}{n}\left(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + y_{\frac{5}{2}} + \cdots + y_{2n-\frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{a-b}{n}\right)^3 \frac{n f''(\xi)}{24}.$$

Das Fehlerglied ist dadurch entstanden, dass $\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$ gleich $n f''(\xi)$ gesetzt werden konnte, wo ξ ein Mittelwert im ganzen Interval ist. Wir haben also

I. $$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{a-b}{n}\left(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \cdots + y_{2n-\frac{1}{2}}\right) + \frac{(a-b)^3 f''(\xi)}{24 n^2}$$

als Formel des mittleren Rechteckes.

Benutzen wir in gleicher Weise Formel II:

II. $$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{a-b}{n}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right) - \frac{(a-b)^3 \cdot f''(\xi)}{12 n^2}$$

als Formel des Grenztrapezes.

Durch Benutzung von III erhalten wir die sogenannte Simpson'sche Regel

III. $$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{a-b}{n}\left(\frac{y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + 2y_1 + 4y_{\frac{3}{2}} + 2y_2 + \cdots + 4y_{2n-\frac{1}{2}} + y_n}{6}\right) - \frac{(a-b)^5 f^{IV}(\xi)}{2880 \cdot n^4}.$$

Die Formel IV gibt endlich die von MacLaurin und Euler aufgestellte Formeln:

$$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{a-b}{n}\left(\frac{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n}{2}\right) + \frac{(a-b)^2}{n^2}\left(y_0' - y_n'\right) + \frac{(a-b)^5 f^{IV}(\xi)}{720 \cdot n^4}.$$

Das zweite Glied ist dadurch so einfach

geworden, dass bei der Summation von $y_0' - y_1' + y_1' - y_2' + y_2' + \cdots$ wie man sieht, alle Diff. quotienten der Mittelstellen wegfallen.

Anmerkung: Die Mac Laurin'sche Formel giebt mit einer geringen Anzahl von Bestimmungsstücken ($n+3$ Beobachtungen) fast dieselbe Genauigkeit, wie die Simpson'sche mit $(2n+1)$ Bestimmungsstücken.

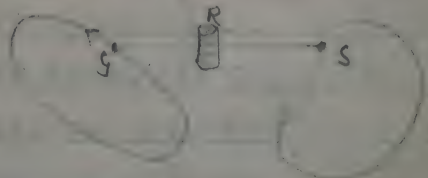
Anmerkung: Im Taschenbuch der „Hütte" 16. Auflage p. 84 sind etliche solche Restangaben.

Apparate zur mechanischen Integration

§ 33. Amsler's Polarplanimeter.

Beschreibung des Apparates siehe W. Dyck. Katalog der Nürnberger Ausstellung 1892/93.

Theorie: Hat man einen Stab und damit verbunden eine gleitende Rolle, und führt man mit diesem Stabe eine geschlossene Bewegung über die Ebene aus, wobei das Ende s einen Flächeninhalt I_1 und das Ende S des Stabes



einen Flächeninhalt I_2 umkreisen mag, so ist $I_1 - I_2$ mit dem Drehwinkel der Rolle proportional:

$$I_1 - I_2 = K.\omega$$

wo K eine Constante von den Dimensionen des Instrumentes abhängt.

Es folgt ausführlich die Möbius'sche Vorzeichenregel.

Die Bewegung des Stabes kann in 3 Teilbewegungen zerlegt werden. Ist ρ der Radius der Rolle, so ist $\rho\, d\omega$ das abgerollte Bogenwegstückchen und zwar ist

I $$\rho\, d\omega = 0 \cdot dx + dy + 0 \cdot d\varphi = dy$$

Um den überstrichenen Flächeninhalt dI zu berechnen, setzen wir fest ω ist positiv, wenn die obere Kante der Rolle voranschreitet, negativ, wenn die untere voranschreitet. In $dI = l \cdot dy$ ist also wegen dy das Vorzeichen stets richtig.

Bei Drehung ist daher

$$dI = \tfrac{1}{2}(\varepsilon'^2 - \varepsilon''^2)\, d\varphi$$

Der Gesamtflächeninhalt, der bei den 3 Teilbewegungen überschritten wird, ergibt sich also zu:

II $\quad dI = 0 \cdot dx + l \cdot dy + \frac{1}{2}(l'^2 - l^2)\, d\varphi$;

nach I folgt

$$dI = \rho l\, d\omega + \tfrac{1}{2}(l'^2 + l^2)\, d\varphi$$

$$I = \rho l \omega + \tfrac{1}{2}(l'^2 + l^2)\, \varphi$$

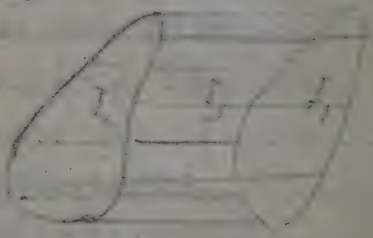
Wird nun wie beim Planimeter die Bewegung des Stabes hinundhergehend, so dass der Stab in seine Ausfangslage zurückkehrt, so wird $\varphi = 0$, also $\quad I = \rho l \omega$

Der gesamte überstrichene Flächeninhalt I ist mit Berücksichtigung der Vorzeichen:

$$I = I_1 + I_3 - I_2 - I_3 = I_1 - I_2$$

Also: Umkreist bei der geschlossenen Bewegung des Stabes das eine Ende $\mathfrak{s}$ im Möbius'schen Sinne einen Flächeninhalt I_1 und das andere $\mathfrak{E}$ einen I_2, dann ist immer $I_1 - I_2 = \rho \cdot l \cdot \omega$. Bewegt sich dabei $\mathfrak{E}$ auf einer Curve hin und her, so wird $I_2 = 0$ und es ist:

$$I_1 = \rho l \omega.$$



§ 34. Der harmonische Analysator von Henrici; nebst Excurs über die Fourier'sche Reihe.

Ist $y = f(x)$ eine um 2π periodische Funktion so kann man sie durch eine Fourier'sche Reihe annähern:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_n\cos nx + b_1\sin x + b_2\sin 2x + \cdots + b_n\sin nx.$$

Anmerkung: Die Bedeutung der Fourier'schen Reihenentwicklung im Gebiete der Akustik ist die, dass eine beliebige periodische Schwingung dargestellt werden soll als eine Ueberlegung von einfachen harmonischen Schwingungen.

Die Aufgabe des Apparates ist, die Coefficienten a und b für die gesuchte Annäherungsformel zu finden. Betrachten wir diese genauer.

Es sei uns die periodische Function $y = f(x)$ gegeben. Bilden wir nun:

1. $(\tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + b_1\sin x + b_2\sin 2x + \cdots) - f(x)$,

so stellt diese Differenz an jeder Stelle den Fehler $v(x)$ dar, den wir begehen, wenn wir nur die 3 ersten Terme berücksichtigen

Analog bekommen wir einen Fehler was, wenn wir n grösser nehmen. In den Beobachtungswissenschaften liegt dieser Fall sehr oft vor, dass man mit notwendigen Fehlern rechnen muss und es ist dann die Aufgabe, diese Differenz durch Annahme der noch unbestimmten Grössen möglichst klein zu machen. Null kann man dieselbe für alle Punkte nicht machen, da die Anzahl der unbestimmten Grössen $a_0\ a_1 \cdots b_1, b_2 \cdots$ beschränkt ist.

Wir verfahren daher nach der Methode der kleinsten Quadrate, wir stellen also die Forderung, dass die Summe S der Fehlerquadrate, also das Integral

$$S = \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots\right) - f(x) \right\}^2 dx$$

ein Minimum werde.

Zu diesem Zwecke werden wir die $(2n+1)$ unbekannten Grössen $a_0, a_1 \cdots b_1, b_2 \cdots$ aus den $(2n+1)$ Gleichungen bestimmen, die so lauten:

2. $$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0\ ,\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \quad \cdots \quad \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b_1} = 0 \quad \cdots \quad \frac{\partial S}{\partial b_n} = 0$$

Bezeichnen wir den Fehler mit v, so haben wir allgemein: $\int_0^{2\pi} v^2 dx$ soll ein Minimum sein. Daraus ergeben sich die $(2n+1)$ Gleichungen

$$\int 2v \frac{\partial v}{\partial a_0} dx = 0 \quad \cdots \quad \int 2v \frac{\partial v}{\partial a_n} dx = 0$$

2a)

$$\int 2v \frac{\partial v}{\partial b_1} dx = 0 \quad \cdots \quad \int 2v \frac{\partial v}{\partial b_n} dx = 0$$

Jetzt die aus Gl. 1 berechneten Werte für die partiellen Diff. quotienten eingesetzt, ergiebt:

3. $\int v\,dx = 0$, $\int v \cos x\,dx = 0$, $\int v \cos 2x\,dx = 0$ $\cdots$ $\int v \cos nx\,dx = 0$

$\int v \sin x\,dx = 0$ $\cdots$ $\int v \sin nx\,dx = 0$

Aus diesen $2n+1$ Gleichungen sind also unsere Coefficienten zu bestimmen.

Wir wollen jetzt diese letzten Gleichungen noch ausführlicher angeben, indem wir für v seinen Wert aus Gl. 1. einsetzen und jedes Glied einzeln integrieren:

3a) $0 = \int_0^{2\pi} v\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx - \frac{1}{2}a_0 \int_0^{2\pi} dx - a_1 \int_0^{2\pi} \cos x\,dx - \cdots$

$- b_1 \int_0^{2\pi} \sin x\,dx - \cdots - b_n \int_0^{2\pi} \sin nx\,dx$

$0 = \int_0^{2\pi} v \cos x\,dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cos x\,dx - \frac{1}{2}a_0 \int_0^{2\pi} \cos x - \cdots - b_n \int_0^{2\pi} \cos x \sin nx\,dx$

$0 = \int_0^{2\pi} v \sin nx\,dx = \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\,dx - \frac{1}{2}a_0 \int_0^{2\pi} \sin nx\,dx - \cdots$

$- b_n \int_0^{2\pi} \sin^2 nx\,dx.$

Die $2n+1$ unbekannten Grössen müssen wir jetzt auflösen. Die Integrale sind dabei Coefficienten. Wir brauchen jedoch keine Determinanten, die Sache geht einfacher. Sehen wir uns die Coefficienten der einzelnen Gleichungen genauer an, so haben wir folgende drei allgemeine Formen für sie:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos n'x \, dx = \int_1, \quad \int \cos nx \sin n'x \, dx = \int_2, \quad \int \sin nx \sin n'x \, dx = \int_3$$

Satz: Das Coefficienten Schema unserer linearen Gleichungen vereinfacht sich nun ausserordentlich, wenn wir die Werte der vorkommenden Integrale ausrechnen.

Bei der ersten Form können wir setzen:

$$\cos nx \cdot \cos n'x = \tfrac{1}{2}\{\cos(n+n')x + \cos(n-n')x\}$$

Dadurch verwandelt sich unser Integral in:

$$\int_0^{2\pi}(1) = \int_0^{2\pi} \cos(n+n')x \, dx + \int_0^{2\pi} \cos(n-n')x \, dx.$$

Ausgeführt:

$$\int_0^{2\pi}(1) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+n')x}{n+n'}\right)_0^{2\pi} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin(n-n')x}{n-n'}\right)_0^{2\pi},$$

wobei im letzten Gliede $n \gtrless n'$ vorausgesetzt ist. Ist nun $n \gtrless n'$, so werden beide Glieder 0 bei Einsetzung der Grenzen; also

$$\int_0^{2\pi}(1) = 0.$$

Ist aber $n = n'$, so wird

$$\int_1 = 0 + \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$

wie man direct sieht (oder aus der allgemeinen Formel $\frac{\sin(n-n')x}{n-n'}$ wieder ableiten kann, indem man die Regel für $\frac{0}{0}$ gebraucht.

Mit denselben Mitteln lässt sich beweisen, dass

$$\int_{(2)}^{2\pi} = \int_0^{2\pi} \cos nx \sin n'x \, dx = 0$$

ist für jedes n und n', ferner dass

$$\int_{(3)}^{2\pi} = \int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin n'x \, dx = 0 \text{ oder } = \pi$$

ist, je nachdem $n \neq n'$ oder $n = n'$ ist.

Aus unseren $2n+1$ linearen Gleichungen wird also:

3b. $0 = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx - a_0\pi$, $0 = \int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx - a_1\pi$ . . . . . .

. . . . . $0 = \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx - b_n\pi$.

Resultat: Unsere linearen Gleichungen vereinfachen sich so, dass jede einzelne Unbekannte für sich gerade bestimmt wird, und zwar sind schliesslich die Werte der gesuchten Coefficienten a_ν und b_ν in der allgemeinen Formel enthalten:

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos \nu x\,dx \quad , \quad b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin \nu x\,dx$$

Wir kommen jetzt zu unserem Apparate selbst zurück. Derselbe hat die Aufgabe, sofern die Curve im Intervall von 0 bis 2π gezeichnet

vorliegt, die Coefficienten a_ν und b_ν mechanisch auszuwerten.

Es folgt zunächst noch eine theoretische Bemerkung, die von Henrici stammt: sie bezieht sich darauf, die einzelnen Integrale in den Gleichungen der Coefficienten durch partielle Integration umzugestalten.

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\nu x\,dx = \frac{1}{\pi}\left(f(x)\frac{\sin\nu x}{\nu}\right)_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi\nu}\int_0^{2\pi}\sin\nu x\cdot\frac{df(x)}{dx}\,dx$$

Der erste Ausdruck rechts wird 0, und wir erhalten, wenn wir für $f(x)$ noch y setzen:

$$a_\nu = -\frac{1}{\pi\nu}\int_0^{2\pi}\sin\nu x\,dy\ ,\quad b_\nu = \frac{1}{\pi\nu}\int_0^{2\pi}\cos\nu x\,dy$$

wobei das Integral an der Curve entlang zu führen ist. (Die Zufügung der Grenzen 0 und 2π bezieht sich nur auf den Spielraum des x).

Es kommt schliesslich alles darauf hinaus, folgende zwei Integrale hinerstreckt an unserer Curve, auszuwerten:

$$\int \sin\nu x\,dy\ ,\quad \int \cos\nu x\,dy\ .$$

Eben dieses besorgt nun der Apparat in directester Weise.

Es folgt Beschreibung des Apparates.

Anmerkung: Diese Betrachtung der Fourierschen Reihe stammt von Tschebyscheff.

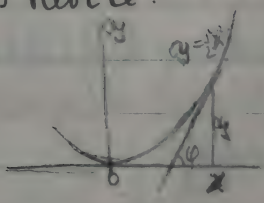
§ 35. Der Integraph von Abdank-Abakanowicz.

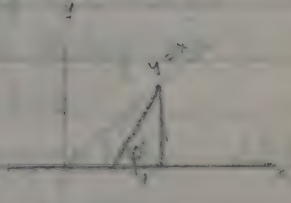
Es stellt sich die Aufgabe, das unbestimmte Int.

$$I = \int^x f(x)\,dx = F(x)$$

auszuwerten, wenn die Curve $y = f(x)$ gegeben ist, oder: er will zu der gegebenen Differential curve die zugehörige Integralcurve zeichnen.

Theorie:





E in Punkt der Integral-curve wird einem Punkte der Differential-curve entsprechend heissen, wenn das x des einen Punktes gleich ist dem x des anderen Punktes.

Um die geometrischen Beziehungen in diesem Punkte festzustellen, ziehen wir in dem Punkte (x, y) die Tangente, so dass

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = (\text{nach Definition}) \; y.$$

Jetzt zeichnen wir von dem entsprechenden Punkte der Diff. curve aus ein Dreieck, sodass die vertikale Kathete gleich y und die horizontale gleich 1 ist.

Wir haben dadurch den Winkel φ construiert, denn

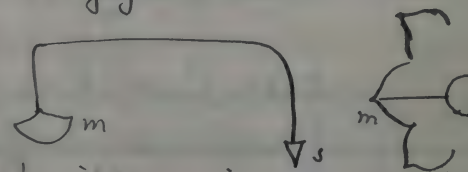
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = y.$$

Also: Erstens ist $x = x$; zweitens construiere man an der Diff. curve obiges Hülfsdreieck, dann wird die geometrische Tangente der Integral-curve mit der Hypotenuse dieses Hülfsdreiecks allemal parallel sein.

Es folgt die Beschreibung des Apparates.

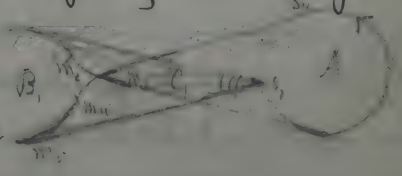
§ 36. Planimeter von Prytz.

Beschreibung:



m ist ein ?; umfährt man mit s die Curve, so beschreibt m eine krummlinige periodische Curve.

Um den Zusammenhang dieser neuen Curve mit dem Flächeninhalte zu erkennen, verfolgen wir die Bewegung der Stange an folgender Fig.



Die Spitze werde in der Pfeilrichtung um den Kreis geführt.

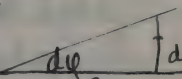
Nach der Möbius'schen Vorzeichenregel ist

A positiv und C negativ. Alles andere fällt weg weil doppelt überstrichen:

$$I = A - C$$

Diesen Flächeninhalt können wir genau so berechnen wie bei Amsler's Planimeter, indem wir die drei infinitesimalen Bewegungen des Stabes betrachten, das $d\varphi$ jetzt aber als Drehwinkel um den linken Endpunkt der Stange betrachten. Wir erhalten:

$$dI = 0 \cdot dx + l \cdot dy + \tfrac{1}{2} l^2 d\varphi$$



Jedoch haben wir bei der Bewegung unserer Stange nur zwei Einzelbewegungen, da dieselbe wegen der Schneide nicht um dy verschoben werden kann. Also bleibt uns direct:

$$dI = \tfrac{1}{2} l^2 d\varphi.$$

Bezeichnen wir in der Figur den Gesammtdrehwinkel mit φ_1 so ist:

$$I = A - C_1 = \tfrac{1}{2} l^2 \cdot \varphi_1.$$

Diese Gl. wollen wir noch umgestalten. Wir beschreiben einen Kreisbogen m,s, mit der Stangenlänge l als Radius, sodass das Gebiet B_1 vom Kreisbogen und der neuen Curve umschlossen, entsteht. Es ist nun:

$$C + B_1 = \tfrac{1}{2} l^2 \phi_1$$

als Kreisfactor. Zu obigem addiert

$$A + B_1 = l^2 \phi_1$$

Also: Der Apparat giebt uns durch den Winkel ϕ_1 nicht den Flächeninhalt A direct, sondern $A+B_1$. Diese Gleichung aus Fig. 1 wollen wir mit Indices schreiben:

I. $$A + B_1 = l^2 \phi_1$$

Jetzt betrachten wir Fig. 2), indem wir den Umlauf von b aus beginnen. Wir erhalten bei dieser Bewegung als überstrichenen Flächeninhalt

$$\Sigma = A - C_2 = \tfrac{1}{2} l^2 \phi_2$$

B beschreiben wir wieder von b aus einen Kreisbogen $m_1 m_2$ und bezeichnen das Gebiet, welches von der neuen Curve und dem Kreisbogen umschlossen ist mit B_2, so ist

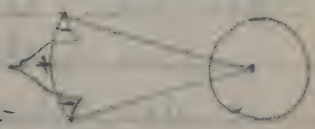
$$C_2 - B_2 = \tfrac{1}{2} l^2 \phi_2 \quad \text{und ferner}$$

II $$A - B_2 = l^2 \phi_2$$

Dabei ist also $A > l^2 \phi_2$.

Um nun die richtige Mitte sofort zu finden,

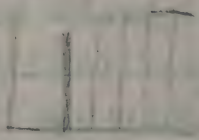
sucht Prytz den Flächeninhalt $B=0$ zu machen.
Es werde nur folgendes hervorgehoben:
Prytz umläuft nicht nur die Conturen,
sondern beginnt in einem
geeigneten Punkte O
innerhalb der zu umfah-
renden Fläche, so dass die Curve der m-Punkte
3 Spitzen erhalten wird. Der Kreisbogen
ist in diesem Falle natürlich von O aus
zu schlagen, und man muss es so einrichten,
dass das B, welches jetzt aus einem
positiven und zwei negativen Teilen
besteht, zu Null wird. Alsdann ist
thatsächlich: $A = l^2 \phi$.
Es sei noch bemerkt, dass Prytz Kunst-
griffe angiebt, um solche Punkte O
zu finden.



Capitel III (Zwischenteil)
Anwendungen der Integralrechnung.
A Auf die Geometrie.

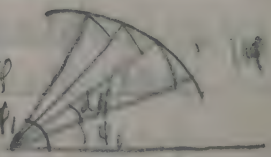
§37. 1) Flächeninhalt ebener Curven.

Bei rechtwinkligen Coordinaten wurde das „Integral" definiert



Polarcoordinaten

Beispiel: log. Spirale $r = e^{k\varphi}$



$$I = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \tfrac{1}{2} r^2 d\varphi = \frac{r_1^2 - r_0^2}{4k}.$$

§38. 2) Bogenlänge ebener Curven.

Rechtwinklige Coordinaten

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

a) $y = f(x)$

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'^2}\, dx$$

b) $x = \varphi(t) \qquad y = \psi(t)$

$$s = \int \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\, dt$$

Beispiele: Ellipse

$x = a\cos t \qquad y = b\sin t$

$$s = \int \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = a\int \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\,dt$$

wo $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$.

$$= -a\int \frac{1-e^2u^2}{\sqrt{(1-u^2)(1-e^2u^2)}}\,du \qquad \text{wo } \cos t = u$$

Dies ist ein elliptisches Integral.

Anmerkung: Man kann elliptische Integrale ebenso gut berechnen, wie alle anderen: z.B.

$$\int \sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt = \int \left(1 - \tfrac{1}{2}e^2\cos^2 t + \tfrac{1}{8}e^4\cos^4 t - \cdots\right)dt$$

Dieses wird gliedweise integriert, u.s.w.

Polarcoordinaten:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

$$s = \int \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}\,d\varphi = \int \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}\,dr = \int \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\,dt$$

Beispiel: log. Spirale $r = c^{k\varphi}$

$$s = \int \sqrt{k^2+1}\cdot r\,d\varphi = \int \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}\,dr = \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}(r_1 - r_0).$$

Lemniskate: $r^2 = a^2\cos 2\varphi$

$$s = a\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = a\int \frac{-du}{\sqrt{(1-u^2)(2u^2-0}}$$

wo $\cos 2\varphi = 2u^2 - 1$.

Dies ist ein elliptisches Integral 1ter Gattung während bei der Ellipse oben wir hatten ein elliptisches Integral 2ter Gattung.

§ 39 3) Bogenlänge von Raumcurven.

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

$$s = \int \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\cdot dt$$

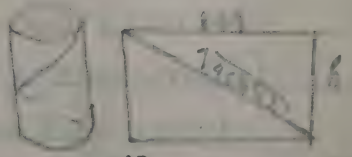
$$= \int \sqrt{\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2}\,dt$$

wo $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$.

Beispiel: Schraubenlinie:

$x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \frac{ht}{2\pi}$

Sie liegt auf dem Rotationscylinder $x^2+y^2=a^2$



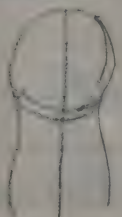
$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\sin t)^2+(a\cos t)^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt\,\sqrt{4a^2\pi^2+h^2} = \sqrt{4a^2\pi^2+h^2}.$$

§ 40. 4). Cubatur der Rotationsflächen.

$$dI = \pi r^2 dz$$

$$I = \pi \int_{z_0}^{z} r^2 dz = \pi \int (x^2+y^2)\,dz$$

$$= \pi \int f(z)\,dz$$



Beispiel: Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad r^2=\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)a^2$$

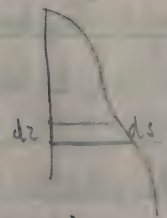
$$I = \pi \int_{-c}^{+c} a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz = \frac{4\pi}{3}a^2c$$

Für $c=a$ (d.h. für Kugel) $I = \frac{4}{3}\pi a^3$.

§ 41 5). Complanation der Rotationsflächen.
Es ist

$$O = \int_{z_0}^{z_1} 2\pi r\, ds = \int_{z_0}^{z_1} 2\pi r \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}\, dz$$

(da für einen Kegelstumpf ein mittlerer Radius angewendet werden darf so ist $dO = 2\pi r ds$)



Beispiel: Rotationsellipsoid

$$r^2 = a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$O = 2\pi \int \sqrt{r^2 + \left(r\frac{dr}{dz}\right)^2}\, dz = \frac{2\pi a}{c^2} \int \sqrt{c^4 + (a^2 - c^2) z^2}\, dz$$

Jetzt machen wir den Unterschied zwischen verlängerten und abgeplatteten Rot Ellipsoiden

1) Für verlängerte Rot Ellipsoid ist $c^2 > a^2$

Es ergiebt sich in diesem Falle

I $$O = 2\pi a^2 + 2\pi ac \frac{\arcsin e}{e}$$

wo $e = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c}$.

Für Kugel wird $c = a$, $e = 0$, $\frac{\sin e}{e} = 1$

$\therefore \underline{O = 4\pi a^2}$

Anmerkung: Der Ausdruck O besteht aus einem algebraischen und einem cyklometrischen Gliede.

---

2) Für abgeplattete Rotationsellipsoide ist $c^2 < a^2$. Hier wird

II $$O = 2\pi a^2 + \frac{\pi c^2}{e'} \cdot \log \frac{1+e'}{1-e'} \qquad \text{wo } e' = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}$$

(da wir die Formel haben:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a^4+x^2}\, dx = \left[\tfrac{1}{2} x \sqrt{a^4+x^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \log\left(x+\sqrt{a^4+x^2}\right)\right]_{x_0}^{x_1}).$$

Für die Kugel wird $e' = 0$. Durch Entwicklung von $\frac{1}{e'} \log \frac{1+e'}{1-e'}$ wird in diesem Falle $O = 4\pi a^2$.

B. Anwendungen der Integralrechnung auf die Mechanik.

§ 42. Bestimmung des Schwerpunktes.

1) Schwerpunkt einer geradlinigen Strecke. Die Strecke von a bis b, sei mit Masse bedeckt und zwar so, dass die variable Dichte berechnet auf die Längeneinheit gleich ρ sei. Dann gilt für das Stückchen dx

$$dm = \rho\, dx$$

Ferner

$$M = \int_a^b \rho\, dx$$

Zur Bestimmung des Schwerpunktes haben wir die Summe der statischen Momente aller

Massenelemente von b bis a nötig; d.h. also

$$M_1 = \int_b^a x\,dm = \int_b^a \rho\, x\,dx$$

Der Schwerpunkt ist alsdann gegeben durch die Gl.

$$\xi = \frac{\text{stat. Moment}}{\text{Gesamtmasse}} = \frac{M_1}{M}$$

Da $M\xi = M_1$

so definieren wir den Schwerpunkt als den Punkt, in welchem man sich die Gesamtmasse konzentriert denken muss, damit dieselbe dort dasselbe statisches Moment in Bezug auf den Anfangspunkt ausübt, wie die actuelle Massenverteilung.

2) Schwerpunkt einer ebenen Fläche.
Das statische Moment eines Flächenstreifens $y\,dx$ ist resp.
1) in Bezug auf die y-Axe: $x\,dm = \rho x y\,dx$
2) " " " " x- " : $\frac{1}{2} y\,dm = \frac{1}{2}\rho y^2 dx$
wo ρ die constante Dichte bedeutet.
Als Gesamtmoment bekommen wir also:
$\int_b^a x\,dm = \rho\int_b^a x\,y\,dx$ und $\int_b^a \frac{1}{2} y\,dm = \rho\int \frac{1}{2} y^2 dx$
Bezeichnen wir die Coordinaten des Schwerpunktes der Gesamtfläche mit ξ, η so wird nach Definition sein:

$$\xi \cdot \rho \int y\,dx = \rho \int x y\,dx \qquad \eta \rho \int y\,dx = \rho \int \tfrac{1}{2} y^2 dx$$
$$\xi = \int_b^a x y\,dx : \int_b^a y dx \qquad \eta = \int_b^a \tfrac{1}{2} y^2 dx : \int_b^a y\,dx.$$

3) Schwerpunkt eines Curvenbogens.
Die statischen Momente des Curvenbogens s in Bezug auf die beiden Coordinaten-axen sind resp.

$$\int x\,dm = \int \rho x\,ds \qquad \int y\,dm = \int \rho y\,ds$$

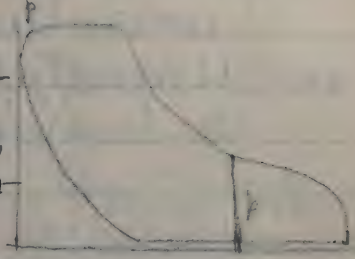
woraus

$$\xi = \int \rho x\,ds : \int \rho\,ds \qquad \eta = \int \rho y\,ds : \int \rho\,ds$$

§43. Die Güldin'schen Regeln
Siehe Williamson Int. Cal. p. 262. g.c.f.

§44. Das Indicator Diagramm.
Der Zweck des Indicators ist bei einer Dampfmaschine die Abhängigkeit der auf der einen Seite des Kolbens wirkenden Dampfspannung p von dem zugehörigen Kolbenwege s darzulegen. Dies geschieht dadurch, dass derselbe den Verlauf der Function $p = f(s)$ in Gestalt einer Curve aufzeichnet. Es lassen sich nun erstens

aus der Gestalt dieser Curve Schlüsse ziehen auf die einzelnen Phasen der Zustandsänderung des Dampfes, zweitens, lässt sich aus dem Flächeninhalt der geschlossenen



Curve, des sogenannten Indicator-Diagramms, sofort die Gesamt-arbeit berechnen die der Kolben bei einmaligem Hin- und Hergange leistet. Wie aus der Mechanik bekannt ist, wird dieselbe gleich

$$A = \int p\,dv = \int f p\,ds,$$

wo f der Querschnitt des Cylinders ist.

Anmerkung: Strenge und Anschaulichkeit in der Mathematik.

Beispiel: $s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ werbet nicht s aus sondern definiert geradezu s. etc. etc.

Interessante Abhandlung von Schaefers Allgemeine Untersuchungen über "Rectifikation der Curven". Acta Math. V.

Capitel V

Feinere Ausführungen zur Integralrechnung

§45. Unendlichwerden des Integranden und der Grenzen beim Beispiel: $\int_b^a x^{-n}\,dx$

1) Wird der Integrand z. B. an einer Grenze ∞ gross, so verliert das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe seine Bedeutung, weil nämlich eines der Δx unendlich gross wird.

Man hilft sich folgendermassen:

Wird $f(x)$ an der Grenze b unendlich gross, so wollen wir unter dem Integral $\int_b^a f(x)\,dx$ den Limes verstehen, den das Integral $\int_{b+\varepsilon}^a f(x)\,dx$ für $\varepsilon=0$ annimmt.

Es kommt das darauf hinaus, für eine von b verschiedene Grenze $b+\varepsilon$ den Uebergang von der Summe zum Integral zu machen und dann erst die Grenze nach b rücken zu lassen.

			für lim. $\varepsilon=0$
1) $n<1$	$\int_\varepsilon^a x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{1-n}}{1-n}\right]_\varepsilon^a = \frac{a^{1-n}}{1-n} - \frac{\varepsilon^{1-n}}{1-n}$		$= \frac{a^{1-n}}{1-n}$
2) $n=1$	$\int_\varepsilon^a x^{-n}\,dx = [\log]_\varepsilon^a = \log a - \log \varepsilon$		$= \infty$
3) $n>1$	$\int_\varepsilon^a x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{1-n}}{1-n}\right]_\varepsilon^a = \frac{a^{1-n}}{1-n} - \frac{\varepsilon^{1-n}}{1-n}$		$= \infty$

2) Erstreckt sich eine der Grenzen ins Unendliche so definieren wir

$$\int_b^\infty f(x)\,dx = \lim_{a=\infty}\left[\int_b^a f(x)\,dx\right]$$

1) $n>1$ $\quad \int_b^a x^{-n}dx = \left[\frac{x^{1-n}}{1-n}\right]_b^a$ $\quad \lim_{a=\infty} = 0 - \frac{b}{1-n}$

2) $n=1$ $\quad \int_b^a x^{-n}dx = [\log x]_b^a$ $\quad \lim_{a=\infty} = \infty$

3) $n<1$ $\quad \int_b^a x^{-n}dx = \left[\frac{x^{1-n}}{1-n}\right]_b^a$ $\quad \lim_{a=\infty} = \infty.$

§46. Allgemeine Betrachtungen hierzu:
Es liege das elliptische Integral 1ter Gattung vor: $\int_b^a \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}$
Wie verhält sich dasselbe an den kritischen Stellen d.h.

1) wenn die Grenze an die Stelle $x=\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rückt, also die Funktion unendlich wird.

2) wenn die Grenze selbst ins Unendliche rückt, also für $a=\infty$.

Fall 1): Was wird aus $\int_\alpha^a \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}$?
Wir werden setzen können:

$$\int_\alpha^a = \lim_{\varepsilon=0}\int_{\alpha+\varepsilon}^a$$

Jetzt führt der 2te Mittelwertsatz zum Ziele:

$$\int_{\alpha+\varepsilon}^{a} = \int_{\alpha+\varepsilon}^{a} \frac{dx}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} = \frac{1}{\sqrt{(\xi-\beta)(\xi-\gamma)(\xi-\delta)}} \int_{\alpha+\varepsilon}^{a} \frac{dx}{\sqrt{x-\alpha}}$$

wo ξ ein Mittelwert im Intervalle ist.

Wir bekommen:

$$\int_{\alpha+\varepsilon}^{a} = \frac{1}{\sqrt{(\xi-\beta)(\xi-\gamma)(\xi-\delta)}} \left[2\sqrt{x-\alpha}\right]_{\alpha+\varepsilon}^{a} = \frac{1}{\sqrt{\quad}} \cdot \left(2\sqrt{a-\alpha} - 2\sqrt{\varepsilon}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\alpha+\varepsilon}^{a} = \frac{2\sqrt{a-\alpha}}{\sqrt{(\xi-\beta)(\xi-\gamma)(\xi-\delta)}}$$

Für β, γ, δ geht man ähnlich vor;
Liegen mehrere Unstetigkeitsstellen vor, so zerlegt man das Integral.

Fall 2) Wir definieren:

$$\int_b^{\infty} = \lim_{a=\infty} \left[\int_b^a \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} \right]$$

Es ist

$$\int_b^a = \int_b^a \frac{dx}{x^2\sqrt{(1-\frac{\alpha}{x})(1-\frac{\beta}{x})(1-\frac{\gamma}{x})(1-\frac{\delta}{x})}}$$

Auf diese Form ist wieder der 2te Mittelwertsatz anwendbar:

$$\int_b^{\infty} - = \lim_{a=\infty} \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\alpha}{\xi})(1-\frac{\beta}{\xi})(1-\frac{\gamma}{\xi})(1-\frac{\delta}{\xi})}} \int_b^a \frac{dx}{x^2}$$

wo ξ ein Mittelwert im Intervalle ist.

Wir erhalten:

$$\int_b^{\infty} = \lim_{a=\infty} \frac{1}{\sqrt{\quad}} \left[-\frac{1}{x}\right]_b^a = \lim_{a=\infty} \frac{1}{\sqrt{\quad}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$\int_b^\infty = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\alpha}{\xi})(1-\frac{\beta}{\xi})(1-\frac{\gamma}{\xi})(1-\frac{\delta}{\xi})}} \cdot \frac{1}{b}.$$

ξ zwischen b und ∞.

Wir wollen jetzt den allgemeinen Gedanken, der diesen Betrachtungen zu Grunde liegt, fixieren.

Liegt uns ein Integral $\int_b^a f(x)\,dx$ vor, so werden wir im Falle 1) versuchen, die Function $f(x)$ zu spalten in $\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^n}$, wo $\varphi(x)$ eine Function ist, die im Intervalle endlich bleibt.

Im Falle 2) werden wir versuchen, unsere Function in $\frac{\varphi(x)}{x^n}$ zu spalten, wo $\varphi(x)$ wiederum endlich bleibt.

Für beide Fälle ist alsdann der 2te Mittelwertsatz anwendbar, und wir erhalten leicht das Resultat das Integral genommen bis an die Unstetigkeitsstelle α bleibt endlich, wenn $n<1$, und das Integral ausgestreckt ins Unendliche bleibt endlich, wenn $n>1$.

§ 47. Gliedweise Integration unendlicher Reihen.

Ist

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots \text{ in inf.},$$

so fragt es sich, ob

$$\int \left(\sum_1^\infty u_\nu\right) dx = \sum_1^\infty \int u_\nu \, dx$$

ist?

Wir ersetzen zunächst die unendliche Reihe durch eine endliche und ein Restglied:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + R(n,x)$$

Unsere Reihe convergiert, wenn der Rest für jedes feste x bei hinreichendem n beliebig klein wird. Sicher ist dann:

$$\int f(x)\,dx = \int u_1\,dx + \int u_2 dx + \cdots + \int u_n dx + \int R(n,x)\,dx$$

Also:

$$\int f(x)\,dx = \sum_1^\infty \int u_\nu dx + \lim_{n=\infty} \int R(n,x)\,dx$$

Wird der $\lim = 0$, so wird auch:

$$\int f(x)\,dx = \int \left(\sum_1^\infty u_\nu\right) dx = \sum_1^\infty \int u_\nu\,dx.$$

Die Frage spitzt sich also so zu:
Wird $R\,dx = 0$, wird dann $\int R\,dx$ auch $= 0$?
Als Beispiel möge sein:

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2}$$

Es sei

$$f_1 = x e^{-x^2},$$

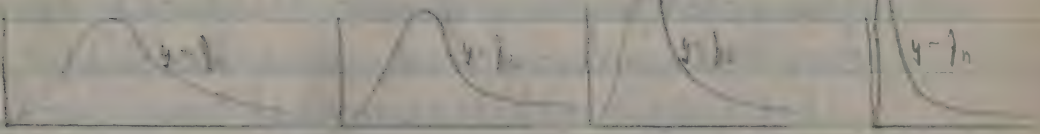
so ist

$$\int_0^\infty x \cdot e^{-x^2} dx = \left[-\tfrac{1}{2} e^{-x^2}\right]_0^\infty = \tfrac{1}{2}$$

Ferner sei

$$f_2 = 2x e^{-2x^2} \cdots f_n = nx e^{-nx^2}$$

Zeichnen wir alle diese Curven, so sehen wir:



Jemehr der Stellenindex wächst, desto rascher fällt die Curve nach rechts hin ab, um sich dann der x-Axe asymptotisch anzuschliessen, während der Gipfel immer höher wird und immer mehr nach links rückt.

Berechnen wir zunächst den Flächeninhalt von $f_n(x)$, so wird:

$$\int_0^\infty nx e^{-nx^2} dx = \left[\tfrac{1}{2} e^{-nx^2}\right]_0^\infty = \tfrac{1}{2}.$$

Das Integral wird also auch endlich bleiben, wenn n unbegrenzt wächst und wir erhalten:

I $$\lim_{n=\infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx = \tfrac{1}{2}.$$

Wir fragen nun nach, was $f_n(x) = n x e^{-nx^2}$ für festes x und $\lim n = \infty$ wird!
Wählen wir z.B. das in der Fig. rechts vom Maximum angedeutete feste x, so sehen wir die zugehörigen Ordinaten $f_1, f_2, \cdots f_n$ nehmen immer mehr ab. Liegt x jedoch links vom Gipfel, so werden die Ordinaten zunächst immer grösser, erreichen dann ein Maximum, und indem der Gipfel über unser x hinaus nach links wandert, werden die Ordinaten für ein festes x immer kleiner bei wachsendem n.
Wir können also sagen:

II $\qquad \lim_{n=\infty} f_n(x) = 0$ für festes x.

Jetzt wenden wir uns der eigentlichen Aufgabe zu. Wir bilden zunächst folgende Reihe:

$$f(x) = (f_1 - f_2) + (f_2 - f_3) + (f_3 - f_4) + \cdots \text{ in inf.}$$

also

$$f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \text{ in inf.}$$

und untersuchen, ob dieselbe in dem in Betracht gezogenen Intervalle von 0 bis ∞

convergiert.
Zu dem Zwecke bilden wir uns die Summe der n ersten Glieder und fügen den Rest hinzu:

$$f(x) = f_1 - f_{n+1} + R(n,x)$$

Also

$$R(n,x) = f_{n+1} = (n+1)x\, e^{-(n+1)x^2}$$

Unsere Reihe convergiert nun, wenn das Restglied etc unendlich klein wird, was hier nach II der Fall ist.
Man unterscheidet nun gut und schlecht convergierende Reihen:
Unsere Reihe convergiert um so langsamer, je näher das x an der Stelle 0 liegt. Denn wenn x eine sehr kleine Grösse ist, so muss man n bereits sehr gross wählen, damit der Gipfel der Curve nach links zu liegen kommt. Ja man kann x so nahe an Null nehmen, dass der Gipfel erst ungeheuer spät erreicht wird. Die Reihe convergiert allerdings für alle Punkte x, aber die Convergenz erleidet in der Nähe von $x=0$

eine unbegrenzte Verzögerung.
Da für $x=0$ der Funktionswert auch $=0$ ist, so ist die Convergenz wieder ganz vorzüglich d
Unsere Reihe ist ungleichförmig convergent.
Das ist der Grund dafür, dass, obgleich der $\lim_{n=\infty} R(nx) = 0$ wird für jedes feste x, doch nicht das neu entstehende Restglied $\int_0^\infty R(nx)\,dx$ im $\lim_{n=\infty}$ gleich 0 wird, sondern gleich $\frac{1}{2}$.
Resultat: Wenn eine unendliche Reihe in einem Intervalle gleichförmig convergiert, dann darf man sie sicher gliedweise integrieren. Übrigens ist die gleichförmige Convergenz zwar eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung.
Die notwendige ist allein, dass $\lim_{n=\infty} \int R(nx)\,dx =$ ist, und das tritt aber im Falle der gleichförmigen Convergenz sicher ein.
Bei den Potenzreihen findet nun dieser Uebelstand nicht statt. Bei derselben können wir also setzen:

$$\int (\sum_1^\infty u_\nu)\,dx = \sum_1^\infty \int u_\nu\,dx.$$

Solche Potenzreihen werden uns durch den Taylor'schen Satz geliefert und mögen

die Form haben:

$$\sum u_\nu = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

also $u_\nu = A_\nu x^\nu$. Die Reihe möge convergiren von 0 ab nach der einen Seite hin bis x und wir wollen fragen, wo convergirt die Potenzreihe am schlechtesten?

Wir nehmen irgendwo im Intervalle eine Stelle $x = \rho X$ an, wo ρ ein echter Bruch ist. Wir haben dann für $x = X$ bezw. $x = \rho X$ die Reihenentwickelung:

1) $A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \cdots$ bezw.

2) $A_0 + A_1 \rho X + A_2 \rho^2 X^2 + \cdots$

Wir sehen in der zweiten Reihe ist jedes einzelne Glied in steigendem Maase kleiner als das entsprechende Glied in der ersten.

Die zweite Reihe convergiert also besser als die erste, deren Convergenz ja Voraussetzung war. Brechen wir nämlich die zweite Reihe an einer bestimmten Stelle ab, so ist bei ihr erst recht das Restglied kleiner als ε, wo ε ein beliebig kleiner Wert für eine angebbare Stelle ist,

(vorausgesetzt dass das Restglied der ersten Reihe bereits $< \varepsilon$ ist). Wir haben also den Satz: Eine Potenzreihe darf innner gliedweise integriert werden, soweit sie convergiert; denn bei ihr tritt nie im Innern des Convergenzintervalles eine unendliche Verzögerung der Convergenz ein. Vielmehr convergiert eine Potenzreihe im Innern überall besser als am Rande der Convergenzstrecke.

§ 48. Differentiation und Integration nach einem Parameter.

1. Frage: Es liege vor

$$\int_b^a f(x,y)\,dx,$$

welches also eine Function des Parameters y darstellt. Es soll dieses bestimmte Integral nach dem Parameter y differentiiert werden. Darf man nun setzen:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x=b}^{x=a} f(x,y)\,dx = \int_{x=b}^{x=a} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

2. Frage: Wann darf man ein bestimmtes Integral nach einem Parameter in der

weise integrieren, dass man unter dem Integralzeichen integriert? Also wann ist

$$\int_c^e dy \int_b^a f(x,y)\,dx = \int_b^a dx \int_c^e f(x,y)\,dy \;?$$

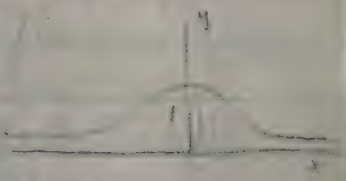
Die Ableitung der folgenden Resultate wird nicht durchgeführt, sondern auf die Lehrbücher verwiesen.
Resultat: In beiden Fällen sind die Operationen vertauschbar, wenn $f(x,y)$ [und bei (1) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$] im Intervalle stetig ist.

Über Berechnung ausgezeichneter bestimmter Integrale.
Es wird vorkommen, dass sich Integrale, welche sich in unbestimmter Form nicht auf niedere Functionen zurückführen lassen für bestimmte Werte der Grenzen a und b unter Umständen doch auf niedere Functionen zurückführen lassen, indem man bald den einen, bald den anderen Kunstgriff anwendet.
Dazu gibt es „Integraltafeln".
Das grösste Werk ist das von Bierens de Haan

Angeführt sollen hier nur zwei Beispiele werden

§ 49. I. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

ist wie gross?



Es ist

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-y^2x^2} y\, dx$$

$$\therefore \quad I^2 = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2x^2} y\, dx\right)$$

Da nun die Functionen unter dem Integralzeichen für alle Wertepaare x y in dem betrachteten Intervalle stetig sind, so können wir die Reihenfolge beider Integralzeichen vertauschen:

$$I^2 = \int_0^{\infty} dx \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2-y^2x^2} y\, dy\right)$$

Es ist

$$\int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)y^2} y\, dy = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

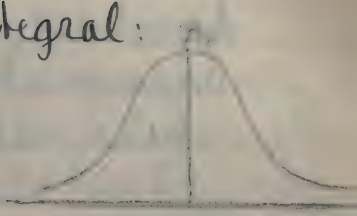
$$\therefore \quad I^2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{2(1+x^2)} = \left[\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2I = \sqrt{\pi}.$$

Bemerkungen zu diesem Integral:

Es ist $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{\sqrt{\pi}} = 1$



Wir zeichnen die Curve

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

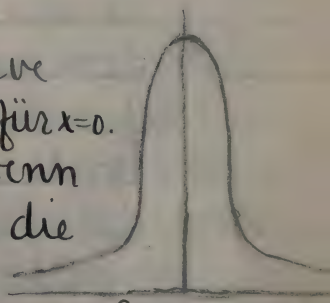
so wird für $x=0$, die Ordinate $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Wir wollen jetzt die Curve noch verallgemeinern, indem wir bei unserem Integral substituieren: $x = \kappa z$, wo κ positiv ist. Dann wird das Integral

$$\int \frac{e^{-\kappa^2 z^2} \kappa \, dz}{\sqrt{\pi}}$$

Wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa^2 z^2} \kappa \, dz}{\sqrt{\pi}} = 1$$



Bei der gezeichneten Curve $y = \frac{\kappa e^{-\kappa^2 z^2}}{\sqrt{\pi}}$ wird jetzt $y = \frac{\kappa}{\sqrt{\pi}}$ für $x=0$.

Die Curve hebt sich also, wenn $\kappa > 1$ ist, κ mal so hoch wie die letzte Curve, dafür aber wächst der absolute Wert des Exponenten von e, also werden die Ordinaten sehr schnell kleiner.

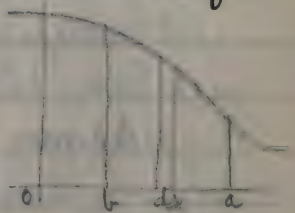
Die Bedeutung dieser Curve ist nun, dass sie das sogenannte „Gauss'sche Fehlergesetz"

darstellt, und da dies für alle Beobachtungswissenschaften grundlegend ist, soll es etwas näher betrachtet werden.

Es sei x der positive oder negative Fehler. Wir tragen denselben auf unserer Abscissenaxe auf und da wird nun die Frage sein, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fehler zwischen zwei bestimmten Abscissen b und a liegt! Nehmen wir z. B. an, wir stellen eine grosse Anzahl Beobachtungen an über ein grosses Intervall ausgedehnt, so wird die Wahrscheinlichkeit nach dem sogenannten Gesetz der grossen Zahlen durch die Zahl der zwischen b und a fallenden Werte dargestellt. Jedenfalls ergiebt sich, dass die Wahrscheinlichkeit abhängt von der Grösse des Fehlers.

Wir wollen dies noch präciser ausdrücken: Der einzelne Fehler hat natürlich eine unendlich geringe Wahrscheinlichkeit; aber wir lesen ja z. B. bei Temperaturen doch nur Fehler bis auf ganz beschränkte

werte, etwa $\frac{1}{100}$° C ab. Es ist also nur die Frage, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dass der Fehler in einem Intervalle dx liegt. Dieselbe wird natürlich abhängig sein von dem Intervalle dx und von einer Function der Grösse des Fehlers. Man setzt sie (die Wahrscheinlichkeit) daher gleich $\varphi(x)dx$. Trägt man nun $\varphi(x) = y$ als Ordinaten zu den einzelnen x auf, so stellt das Flächenelement $\varphi(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit für das H ineinfallen eines Fehlers in dieses kleine Intervall dx dar.



Umgekehrt, wenn diese Wahrscheinlichkeitscurve $y = \varphi(x)$ noch unbekannt ist, so muss dieselbe so gewählt werden, dass $\varphi(x)dx$ eben die Wahrscheinlichkeit für das H ineinfallen des Fehlers in das Intervall dx darstellt. Nach dem Begriff der Wahrscheinlichkeit ist nun leicht einzusehen, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Fehler liege zwischen den Grenzen b und a, gleich ist

$(w)_b^a = \int_b^a \varphi(x)\,dx$.

Mache ich jetzt von dem letzten Ergebnis Gebrauch für den Fall dass $b=-\infty$ und $a=+\infty$ ist, so ist von vornherein klar, dass der Fehler sicher in diesem Intervalle liegt. Man bezeichnet diese Wahrscheinlichkeit bekanntermassen mit „Gewissheit". Dieselbe ist gleich 1, da die Wahrscheinlichkeit überhaupt das Verhältniss der Zahl der günstigen Fälle zur Zahl der möglichen Fälle darstellt.

Satz: Die Wahrscheinlichkeitscurve muss dem Gesetze gehorchen, dass das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ gleich 1 ist; denn es ist gewiss, dass der Fehler zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegt. Was man sonst noch von der Curve kennt, ist sehr wenig. Jedenfalls muss man der Wahrscheinlichkeitscurve in den einzelnen Gebieten verschiedene Gestalt geben. Die verschiedenen Gebiete (Flächen-, Längen-, Winkel-Messungen, Statistiken, Psychologie etc.) unterscheiden sich nun danach, ob κ gross oder klein ist, d.h. ob die Curve sich hoch

erhebt oder nicht. k heisst demnach der Genauigkeitscoefficient für die einzelne Art der Messung.

Wenn wir nun berechnen wollen, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen b und a liegt, so handelt es sich um das allgemeine Integral

$$\int_b^a \frac{e^{-x^2} dx}{\sqrt{\pi}}$$

Wir schliessen diese Erläuterungen zu dem interessanten Beispiel mit den Worten: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen b und a liegt, führt nach dem Gauss'schen Fehlergesetze auf ein Integral, welches man nicht auf niedere Functionen reduzieren kann, und welches daher nach den bekannten Methoden numerisch berechnet werden muss, sofern man nicht die Tafeln benutzen will, die die berechneten Werte bereits enthalten (vergl. Markoff, Petersburg, 14 stellige Tafeln)

§ 50. II $\int_{x=0}^{\infty} \frac{\sin(yx)}{x}\,dx$

wo y ein Parameter ist.
Ist $y=0$ so ist das Integral $=0$; ist $y \gtrless 0$ so sei $yx=z$; das Integral wird

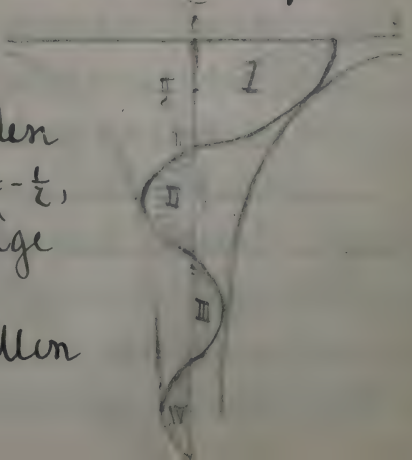
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz$$

Wir unterscheiden hier, was die Grenzen angeht

1) für $y>0$ $\quad \int = \int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz$

2) " $y<0$ $\quad \int = \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz$

Wir stellen zunächst die zu integrierende Function $\frac{\sin z}{z}$ als Curve dar und zwar der Einfachheit halber nur für positive Werte von z.
Für $z=0$ wird nun $\frac{\sin z}{z}=1$, ferner $\sin z=0$ für $z=\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ also auch $\frac{\sin z}{z}=0$ für diese Werte von z.
Zeichnen wir nun in der Figur noch die beiden Hülfscurven $y'=\frac{1}{z}$, $y''=-\frac{1}{z}$, welche zwei gleichseitige Hyperbeln darstellen.
Nun wird an den Stellen $z=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$



bezw. $\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \cdots\cdots$
d. h. die Curve reicht an diesen Stellen an die Hyperbel heran. Die Curve $y = \frac{\sin z}{z}$ hat also unendlich viele 0-Stellen und pendelt in immer stärker gedrängten Wellen an die Hyperbeln heran.
Hat nun $\int \frac{\sin z}{z} dz$ einen Sinn? Bei der Fig. heisst das; umschliesst die Curve von 0 beginnend bis zu $z = \infty$ einen endlichen Flächeninhalt?
Wir sehen es wechseln dabei die positiven Flächenteile mit den negativen ab, deren absoluter Wert der Reihe nach I, II, III, IV ..... sein mag. Der gesammte Flächeninhalt erscheint also in der Form:

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz = I - II + III - IV + \cdots\cdots$$

Die Frage spitzt sich also so zu: wird die Reihe überhaupt einer endlichen Grenze zustreben. Dann und nur dann hat unser bestimmtes Integral eine bestimmte Bedeutung.
Wir setzen unser Integral, das sich bis ins Unendliche erstreckt, gleich $\lim_{z=\infty} \int_0^z \frac{\sin z}{z} dz$.

Dem entspricht genau, dass wir

$$I - II + III - IV + \dots$$

ins Unendliche fortsetzen.

Es folgen einige Regeln über Reihenconvergenz:
Reihen, deren Glieder im Vorzeichen alternieren, convergieren, sobald die Glieder von einer bestimmten Stelle ab immer kleiner werden und $\lim_{\nu = \infty} u_\nu = 0$ ist. (da $S_{2\nu} < S < S_{2\nu+1}$, welche beiden Teilsummen sich immer näher rücken werden)

Der nun in Frage stehende Inhalt S ist etwas bestimmtes, weil auf unsere Reihe $I - II + III - \dots$ diese Convergenz Betrachtung ohne weiteres anwendbar ist.

Um den Wert nun zu ermitteln, haben wir einige Kunstgriffe nötig:
Behandeln wir zunächst das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} \sin yx}{x} dx$$

wo y positiv sein mag.
Wir zeichnen zunächst

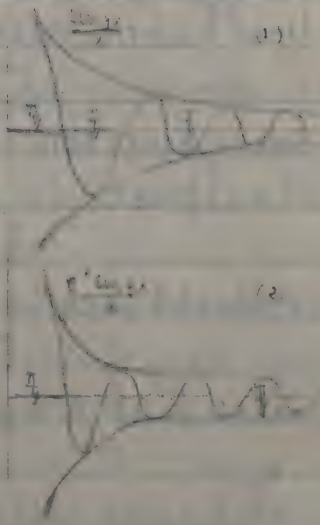
$$f_1(x) = \frac{\sin yx}{x}$$

welche der letztgezeichneten Curve ähnelt; sie hebt sich bei $x = 0$ auf y statt auf 1 und die

Basen der Wellenberge betragen $\frac{\pi}{y}$.
Nun können wir auf den Verlauf der Integranden-Curven leicht einsehen:

$$y = f_2(x) = \frac{e^{-x} \sin yx}{x}.$$

Die Folge des zutretenden Exponentialfaktors ist, dass nun die Wellen nach rechts hin noch stärker gedrängt werden. Dies bewirkt wiederum, dass die Reihe nur noch besser convergiert.



Wir wollen jetzt das Integral

$$S(y) = \int_{x=0}^{x=\infty} \frac{e^{-x} \sin yx}{x} dx$$

als Function von y betrachten. Direct können wir es nun nicht auswerten. Aber wir können direct durch Differentiation $\frac{dS}{dy}$ finden.
Und zwar ist, indem wir gleich unter dem Integralzeichen differentiieren:

$$\frac{dS}{dy} = \int_{x=0}^{x=\infty} e^{-x} \cos yx \, dx,$$

wobei der Fortschritt im Wegfall des Nenners besteht.

Das ist nun ein Integral das wir sofort auswerten können: Dabei wollen wir aber beachten, dass unser eigentliches Integral ist:

$$S(y) = \int_0^y \frac{dS(y)}{dy}\, dy$$

wobei 0 als untere Grenze gewählt ist, weil $S(y)$ für $y=0$ ersichtlich verschwindet.
Wir haben also zunächst das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos yx\, dx$$

auszuwerten. Nach dem früher behandelten Beispiele:

$$\int x^m e^{ax} \cos bx\, dx$$

ergibt sich sofort:

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos yx\, dx = \left[\frac{y \sin x - \cos x y}{1+y^2} \cdot e^{-x}\right]_0^\infty = \frac{1}{1+y^2}$$

Also haben wir:

$$S(y) = \int_0^y \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y$$

und zwar gleich demjenigen arctg. y, der für $y=0$ verschwindet.
Wir haben also durch diesen doppelten Kunstgriff, Differentiieren nach einem Parameter und dann Integrieren nach demselben Parameter unser Integral zu

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} \sin yx}{x}\, dx = \operatorname{arctg} y$$

ausgewertet. Jetzt machen wir wieder die

Substitution $y x = z$, $dx = \frac{dz}{y}$, wo y eine positive Grösse ist. Also haben wir:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{y}} \cdot \frac{\sin z}{z} dz = \operatorname{arctg} y.$$

Nehmen wir hiervon den $\lim_{y=\infty}$, so erhalten wir gerade das gesuchte Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}.$$

als Schlussresultat.

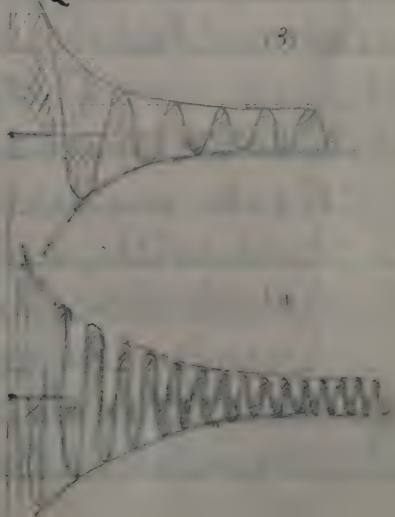
(Da ist die Voraussetzung dass man den $\lim_{y=\infty}$ findet, indem man <u>unter</u> dem Integralzeichen $y = \infty$ setzt.).

§ 51. Allgemeines über fluktuierende Curven:

Wir haben wieder das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

für y positiv.



Lässt man y immer grösser und grösser werden, so wird die Curve ganz ausserordentlich schmal und steile Wellen bekommen. Die Curve wird aber

denselben Flächeninhalt wie anfangs umspannen. Dagegen ist

$$\int_b^a \frac{\sin yx}{x}\,dx$$

kleiner geworden, wenn b und a feste Abscissen sind. Es kann ja nicht soviel behagen, wie der von der ersten Welle, von b abgerechnet, umspannte Flächeninhalt ausmacht, weil der Flächeninhalt von b bis a sich ja schreiben lässt:

$$\int_b^a = u_b - u_{b+1} + u_{b+2} - u_{b+3} + \cdots$$

$$= u_b - (u_{b+1} - u_{b+2}) - (u_{b+3} - u_{b+4}) - \cdots < u_b$$

Dieser Wert u_b ist aber für hinreichend grosses y beliebig klein, da die Basis $\frac{\pi}{y}$ beliebig klein wird.

Wir erhalten daher für $\lim_{y=\infty}$

$$\int_b^a \frac{\sin yx}{x}\,dx = 0$$

was wir nächstens bei der Fourier'schen Reihe wieder benutzen wollen.

Eine solche auf und abpendelnde Function heisst eine fluctuirende nach Hamilton.

Vergleichen wir noch einmal mit der Gauss'schen Fehlercurve, so erhalten wir:

Bei den Curven, deren Ordinaten $y = e^{-y^2x^2}$

sind, y dabei als Parameter betrachtet, haben wir an sich genau dasselbe Verhältnis. Je mehr das y wächst, um so mehr wird ein constanter Flächeninhalt nach links geschoben und das Integral von irgend einer positiven Grenze a ab bis hin nach ∞, nimmt immer mehr ab.
Der Grund für das gleiche Resultat ist in den beiden Fällen aber ein ganz verschiedener. Im Falle (e^{-x^2}) oder ($ye^{-x^2y^2}$) werden bei wachsendem y die Ordinaten der Curve rechts von a immer kleiner und kleiner. Bei der Curve ($\sin yx$) aber, bleibt der Spielraum für die Ordinaten nach wie vor durch die beiden Grenzhyperbeln gegeben und nur das auf- und ab-oscillieren wird mit wachsendem y immer rascher.

Definition neuer Funktionen durch bestimmte Integrale:

§ 52. Die Perioden der elliptischen Integrale:
Wir hatten früher das elliptische Integral

1ter Gattung in folgender Form geschrieben:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}.$$

Ein solches Integral kann man nun durch eine lineare Substitution $x = \frac{az+b}{cz+d}$ auf die sogenannte Normalform bringen:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

(Legendre'sche Normalform).
Die Grösse k welche kleiner als 1 gemacht werden kann, heisst dann der Modul des elliptischen Integrals.
Aus der Normalform sehen wir nun, dass die Function unter dem Integral unendlich wird an den Stellen

$$z=+1,\ z=-1,\ z=+\tfrac{1}{k},\ z=-\tfrac{1}{k}.$$

Wir wissen aber auch, dass das elliptische Integral selbst überall, auch an diesen Stellen endlich bleibt.
Diese Unendlichkeitspunkte wollen wir nun benutzen, um bestimmte elliptische Integrale zu definieren. Wir wollen nämlich folgende bestimmte Integrale betrachten:

1) $\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\kappa^2 z^2)}}$ 2) $\int_1^{\frac{1}{\kappa}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\kappa^2 z^2)}}$

Das erste Integral pflegt man mit K und das zweite mit iK' zu bezeichnen. In der Theorie der elliptischen Funktionen nennt man die Grössen K und K' (oder genauer $4K$ und $2iK'$) die Perioden des elliptischen Integrals.

Die elliptischen Integrale sind nicht nur Funktionen ihrer Grenzen, sondern auch des unter dem Integralzeichen stehenden Parameters κ des Legendre'schen Moduls; ins besondere betrachtet man die sogenannten Perioden K und iK' des elliptischen Integrals als Funktionen des κ und spricht dann von <u>elliptischen Modulfunktionen</u>. Wir begnügen uns, hier diesen Namen genannt zu haben.

§ 53. Die Gamma-Function.

Eulersche Integrale sind Integrale zwischen festen Grenzen, bei welchen im Integranden Parameter auftreten, die in dem Exponenten stehen. Nehmen wir das einfachste Beispiel, die Γ-Function, wo p ein Parameter sein soll:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx$$

Dieses Integral wird also als Function von p (Gammafunction) aufgefasst oder auch nach Gauss $\Pi(p-1)$ geschrieben. Man nennt dasselbe auch das Eulersche Integral zweiter Art.

Dass es gestattet ist, das Integral bis ins Unendliche zu erstrecken ist leicht einzusehen, da in Folge des Factors e^{-x} die Function unter dem Integralzeichen mit wachsendem x sich sehr schnell der Null nähert.

Jedoch wegen der oberen Grenze müssen wir folgende Einschränkung machen. Unsere Formel definiert eine Function von p nur für $p > 0$; denn sobald $p \leqq 0$ wird, steht unter dem Integralzeichen eine Function, welche bei $x = 0$ in unerlaubter Weise unendlich wird.

Um den Verlauf der Γ-Function zu untersuchen

zeichnen wir uns ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit p-Axe und Γ-Axe.
Wir können nun sofort zwei Werte der Function berechnen: Es ist nämlich:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \sqrt{\pi}\,; \quad (x = z^2)$$

Wir können jetzt vermöge einer merkwürdigen Eigenschaft der Γ-Function noch beliebig viele andere Punkte unserer Curve berechnen: Ist p positiv, so ist

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x}\,dx, \quad \Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx.$$

Gestalten wir das erste Integral durch teilweise Integration um, so erhalten wir:

$$\Gamma(p+1) = \left[-e^{-x}x^p\right]_0^\infty + \int_0^\infty p x^{p-1} e^{-x}\,dx$$

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$$

Diese Gleichung heisst Functionalgleichung.
Setzen wir jetzt $p = 1, 2, \ldots$ so bekommen wir

$$\Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1! \qquad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

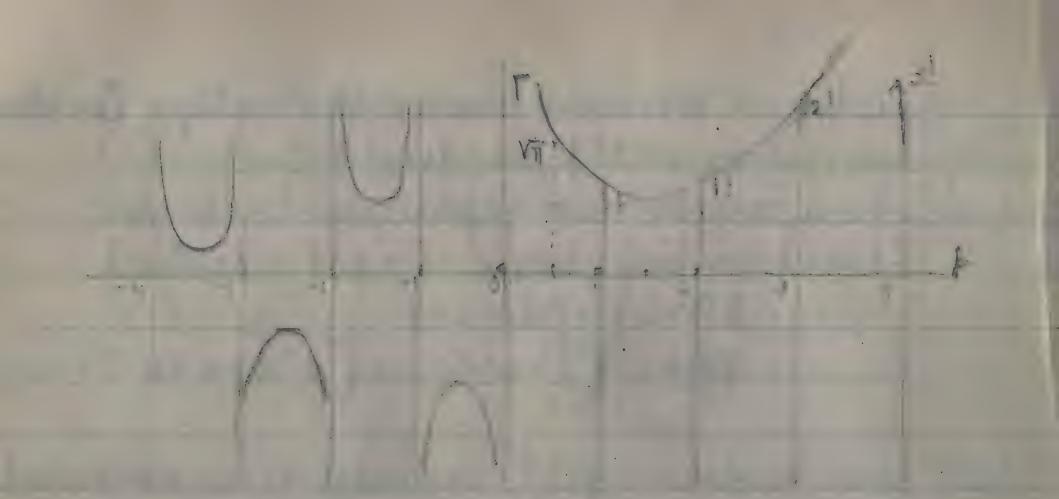
$$\Gamma(3) = 2\cdot\Gamma(2) = 2! \qquad \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(4) = 3\cdot\Gamma(3) = 3! \qquad \Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{3}{2}\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

. . . . . .

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = n-1!$$

Γ



Die Γ-Function erscheint also als Interpolation der Facultät, d.h. sie verbindet die Punkte, deren ganzzahlige Abscissen gleich n sind, und deren Ordinaten gleich n-1! ist durch einen continuierlichen Curvenzug.

Wir wollen jetzt die Funktionalgleichung in anderer Gestalt schreiben:

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \frac{\Gamma(p+2)}{p(p+1)} = \cdots$$

Diese Formeln können wir jetzt benutzen um Werte für $p < 1$ zu berechnen. Wir erhalten:

$\Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} = \infty$ (und zwar in +er Richtung sich ∞ nähernd)

$\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(1)}{-1 \cdot 0} = \infty$ (" " " " " " " " -ver " " " " " " " ")

$\Gamma(-2) = \frac{\Gamma(1)}{-2 \cdot -1 \cdot 0} = \infty$ (" " " " " " " " +ver " " " " " " " ")

$$\Gamma(-\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-\tfrac{3}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-\tfrac{5}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{3}{2})}{-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}\cdot-\frac{5}{2}} = \qquad = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

Für diese Γ-Function sind nun numerische Tabellen berechnet von Legendre und Gauss (Dabei schreibt Gauss $\Gamma(p) = \Pi(p-1)$, wodurch der Zusammenhang mit der Facultät angedeutet werden soll)

Die Γ-Function ist eine elementare Transcendente, auf welche man zahlreiche andere bestimmte Integrale zurückführen kann. Wir führen hier nur folgendes Beispiel an:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

wo $p > 0$, wegen der unteren Grenze und $q > 0$, " " oberen " sein muss.

Dieses Integral stellt ein Eulersches Integral 1ter Art dar, und zwar führt man dasselbe auf Γ-Functionen zurück, indem man zeigt, dass es gleich

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

ist. Bezüglich des Beweises verweisen wir auf die Lehrbücher und machen bei 30° C. im schattigen Schluss!

Die Fourier'sche Reihe.

Die endliche Reihe und ihr Restglied.

Aufgabe: Es soll eine um 2π periodische Function, die sonst ganz beliebig verläuft, auch Unstetigkeitsstellen besitzt durch eine trigonometrische Reihe approximiert werden.

Wir schrieben die Reihe früher (p.) in der Form

$$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots\cdots + a_n\cos nx$$
$$+ b_1\sin x + b_2\sin 2x + \cdots\cdots + b_n\sin nx$$

Das möglichst gut Approximieren präcisieren wir dadurch, dass wir fordern, die Summe der Fehlerquadrate sollte ein Minimum sein.

Also

$$\int \left(f(x) - \tfrac{1}{2}a_0 - \sum_1^n a_\nu\cos\nu x - \sum_1^n b_\nu\sin\nu x\right)^2 dx = \text{min}.$$

Daraus ergiben sich folgende Werte für die Coefficienten:

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\cos\nu z\,dz\,,\quad b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\sin\nu z\,dz\,;\ (\nu = 1\cdots n)$$

Es erübrigt die Bestimmung des Fehlers.

Wir werden schreiben:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \cdots\cdots + a_n\cos nx + b_1\sin x + \cdots + b_n\sin nx + R(n,x)$$

und die Aufgabe ist nun, dieses Restglied $R(n,x)$ abzuschätzen. Es ist also

$$R(n,x) = f(x) - \left(\tfrac{1}{2}a_0 + \cdots + a_n\cos nx + \cdots + b_n\sin nx\right)$$

wo wir für a_ν und b_ν ihre Werte eintragen wollen. Wir erhalten dann:

1. $R(n,x) = f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\,dz - \frac{\cos x}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\cos z\,dz - \cdots - \frac{\cos nx}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\cos nz\,dz$
$- \frac{\sin x}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\sin z\,dz - \cdots - \frac{\sin nx}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\sin nz\,dz$

Zunächst bringen wir die endliche Zahl von Integralen unter ein Integralzeichen:

2. $R(n,x) = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\, f(z)\left\{\frac{1}{2} + \cos z\cos x + \cos 2z\cos 2x + \cdots + \cos nz\cos nx\right.$
$\left. + \sin z\sin x + \cdots + \sin nz\sin nx\right.$

Ziehen wir die in den Argumenten übereinstimmenden Summanden zusammen, so wird

3. $R(n,x) = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\, f(z)\left\{\frac{1}{2} + \cos(z-x) + \cos 2(z-x) + \cdots + \cos n(z-x)\right\}$

Wir wollen jetzt beachten, dass, wenn wir die Klammergrösse Glied für Glied integrieren so werden wir erhalten

$$\int_0^{2\pi} dz\left(\tfrac{1}{2} + \cos(z-x) + \cos 2(z-x) + \cdots + \cos n(z-x)\right) = \pi$$

Folglich können wir auch schreiben:

$$f(x) = \frac{f(x)}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\left(\tfrac{1}{2} + \cos(z-x) + \cdots + \cos n(z-x)\right)$$

Dieser Wert von $f(x)$ in (3) eingesetzt gibt:

4. $R(n,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\left(f(x)-f(z)\right)\left\{\frac{1}{2} + \cos(z-x) + \cdots + \cos n(z-x)\right\}.$

$= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} dz\left(f(x)-f(z)\right)\left\{\frac{1}{2} + \cos(z-x) + \cdots + \cos n(z-x)\right\}.$

Es folgt daraus durch die Substitution $z-x=\xi$:

5. $R(n,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\xi\left(f(x)-f(x+\xi)\right)\left\{\frac{1}{2} + \cos\xi + \cos 2\xi + \cdots + \cos n\xi\right\}$

Dabei bedeutet der eine Faktor unter dem Integralzeichen, $f(x) - f(x+\xi)$, die Schwankung, welche unser Functionswert gegen den festen Wert $f(x)$ erleidet, wenn man ξ von $-\pi$ bis $+\pi$ laufen lässt. Um den anderen Faktor besser verstehen zu können stellen wir ihn als Curve:

$$y = \frac{1}{2} + \cos\xi + \cos 2\xi + \cdots + \cos n\xi$$

dar. Es ist dies eine Curve, die ebenfalls um 2π periodisch ist. Ausserdem ist dieselbe aber in Bezug auf die Ordinatenaxe symmetrisch. Bei $\xi = 0$ steigt die Curve bis zur Ordinate $\frac{1}{2}(2n+1)$ an. Ferner ist der Flächeninhalt einer ganzen Welle der Curve gleich:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} y \, d\xi = \pi$$

wie wir vorhin schon berechneten.

Die Gleichung dieser Curve $y = f(\xi)$ können wir nun noch vereinfachen. Multiplizieren wir einmal auf beiden Seiten mit $\sin\frac{\xi}{2}$, so erhalten wir

$$y \sin\tfrac{\xi}{2} = \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\xi}{2} + \cos\xi\sin\tfrac{\xi}{2} + \cdots + \cos n\xi \sin\tfrac{\xi}{2}.$$

Jetzt wollen wir die einzelnen Glieder folgendermassen spalten:

$$y \sin\tfrac{\xi}{2} = \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\xi}{2} + \tfrac{1}{2}\left[\sin\left(\xi + \tfrac{\xi}{2}\right) - \sin\left(\xi - \tfrac{\xi}{2}\right)\right] + \cdots + \tfrac{1}{2}\left[\sin\left(n\xi + \tfrac{\xi}{2}\right) - \sin\left(n\xi - \tfrac{\xi}{2}\right)\right]$$

Also ist

$$y \sin\frac{\xi}{2} = \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\xi}{2} - \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{3\xi}{2} + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{5\xi}{2} - \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{7\xi}{2} + \cdots + \tfrac{1}{2}\sin(n\xi + \tfrac{\xi}{2})$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin\frac{(2n+1)\xi}{2}.$$

Die Hülfscurve hat also folgende einfache Form:

$$y = \frac{\sin\frac{(2n+1)\xi}{2}}{2\sin\frac{\xi}{2}}.$$

Unser Restglied erhält somit die Form:

$$R(n,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\xi\,(f(x) - f(x+\xi)) \cdot \frac{\sin\frac{(2n+1)\xi}{2}}{2\sin\frac{\xi}{2}}.$$

Näheres Studium der Hülfscurve.

Wir wollen uns jetzt ein möglichst klares Bild von der Bedeutung dieser Formel machen und wollen zu dem Zweck die Hülfscurve noch genauer betrachten. Nehmen wir beispielsweise $n = 4$ und zeichnen uns für diesen Fall die Hülfscurve auf, so erhalten wir für $\xi = 0$ die Maximalordinate $y = \frac{9}{2}$. Ferner wird $y = 0$ für alle Werte ξ in unserem Intervalle von 0 bis π, die Multipla von $\frac{2\pi}{2n+1}$ sind; also für $\xi = \frac{2\pi}{9}$, $\frac{4\pi}{9}$, $\frac{6\pi}{9}$ und $\frac{8\pi}{9}$. Die Curve ist eingeschlossen zwischen den beiden Grenzcurven $\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\xi}$ und $-\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\xi}$, welche bei $\xi = 0$ bezw. $\xi = \pi$ die Ordinaten $y = \pm\infty$ bezw.

$y = \pm \frac{1}{2}$ haben. Zwischen diesen beiden Grenz-Curven wird sich also unsere Hülfscurve auf und abbewegen und zwar wird die Anzahl der Wellen in unserem Intervall um so grösser sein, je grösser n ist. Wir sehen also, dass wir hier eine grosse Ähnlichkeit mit unserer früheren Curve haben.
Wir werden sagen: Unsere Hülfscurve gehört also zu den fluctuierenden Curven, welche zwischen den beiden Grenzcurven

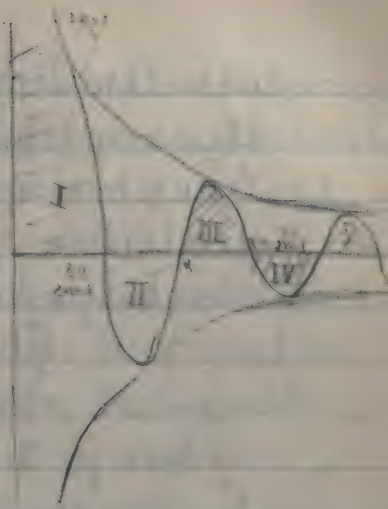
$$y = +\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\xi} \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\xi}$$

fortwährend auf und abgehen.
Diese Hülfsfunction steht nun unter dem Integralzeichen und deshalb wollen wir uns etwas näher mit ihrem Flächeninhalte beschäftigen: Die Gesammtfläche ist gleich

$$\text{I} - \text{II} + \text{III} - \text{IV} + \cdots \cdots = \frac{\pi}{2}.$$

Aber hiermit reichen wir noch nicht aus, und zwar haben wir vorerst noch die Teilfläche I und eine andere beliebige im Intervalle liegende Teilfläche, etwa III abzuschätzen:
Der Flächeninhalt I hat die Basis $\frac{2\pi}{2n+1}$, folglich ist das umschriebene Rechteck gleich

$\frac{2\pi}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2} = \pi$ (vgl. Fig.)



Also: 1) $I < \pi$.

Jetzt schätzen wir einen beliebigen anderen Teil A z. B. III ab. Derselbe ist gegeben durch das Integral

$$A \int_{\alpha}^{\alpha + \frac{2\pi}{2n+1}} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\xi}{2 \sin \frac{1}{2}\xi} \, d\xi$$

wobei die Bedeutung von α aus der Fig. erkenntlich ist.

Dieser Flächeninhalt kann nun positiv oder negativ sein; wir wollen jedoch nur den absoluten Betrag $|A|$ betrachten.

Auf dieses Integral können wir nun den erweiterten Mittelwertsatz anwenden, da $\sin \frac{1}{2}\xi$ im ganzen Intervalle grösser als $\sin \frac{\alpha}{2}$ ist.

Da also $\frac{1}{\sin \frac{1}{2}\xi} < \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$ ist, so ergiebt sich:

$$|A| < \left| \int_{\alpha}^{\alpha + \frac{2\pi}{2n+1}} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\xi}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha} \, d\xi \right| < \left| \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \left[-\frac{2}{2n+1} \cos \frac{2n+1}{2}\xi \right]_{\alpha}^{\alpha + \frac{2\pi}{2n+1}} \right|$$

2) $$|A| < \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\alpha} \left| \cos \frac{2n+1}{2} \cdot \pi \right| < \frac{2}{(2n+1) \sin \frac{1}{2}\alpha}$$

Führen wir jetzt einmal an der Stelle α einen Schnitt, wie die Fig. zeigt, so können

wir den Inhalt der Wellen links von α, also von 0 bis α, und den Inhalt der Wellen links von α, also von 0 bis α, und den Inhalt der Wellen rechts von α, also von α bis π, abschätzen: Wir können schreiben:

$$\int_0^\alpha \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\xi}{2\sin\frac{\xi}{2}}\,d\xi < \text{I} < \text{II}$$

indem ja II von I abgezogen werden muss um $\int_0^\alpha$ zu ergeben. Folglich ist:

(1'.)
$$\int_0^\alpha \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\xi}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\xi < \Pi.$$

Was nun den Flächeninhalt von α bis π anbelangt so besteht derselbe ebenfalls aus positiven und negativen Teilen und ist gleich:

$$\int_\alpha^\pi = \text{III} - \text{IV} + \text{V} - \text{VI} + - - - -$$
$$= A - \text{IV} + \text{V} - - - - -$$

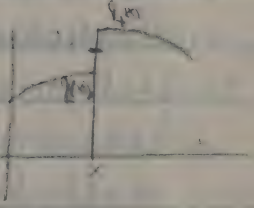
Von diesen Gliedern ist jedes folgende immer kleiner als das vorhergehende (da das Integral mit dem Factor $\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\xi}$ behaftet ist). Dazu alternieren die Glieder im Vorzeichen. Mithin ist:

(2'.)
$$\left|\int_\alpha^\pi\right| < |A| < \frac{2}{(2n+1)\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Dies sind zwei fundamentale Abschätzungen die wir den eigentlichen Restgliduntersuchungen zu Grunde legen wollen, die wir jetzt wieder aufnehmen:

Vorbereitungen zur Abschätzung des Restgliedes

Wir setzen zunächst fest, dass die Funktion an Sprungstellen jedesmal den Mittelwert $\frac{1}{2}(f_+(x) + f_-(x))$ haben soll.



Dies wollen wir auch in unserer Restgliedformel zur Geltung bringen.

Dasselbe war ja entstanden aus:

$$R(n,x) = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\xi\, f(x+\xi)\, \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\xi}{2\sin\frac{1}{2}\xi}.$$

Wir berücksichtigen die Möglichkeit einer Sprungstelle an der Stelle x in der Formel für $R(n,x)$ dadurch dass wir schreiben:

$$R(n,x) = \frac{1}{2}[f_+(x) + f_-(x)] - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\xi\, f(x+\xi)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\xi}{2\sin\frac{1}{2}\xi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} d\xi\, f(\quad)\frac{\sin}{2\sin}$$

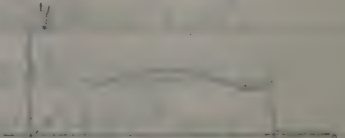
Da nun $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\xi\, \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\xi}{2\sin\frac{1}{2}\xi} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} d\xi\, \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\xi}{2\sin\frac{1}{2}\xi}$

ist, so machen wir den Kunstgriff $\frac{1}{2}f_+(x)$ unter das erste und $\frac{1}{2}f_-(x)$ unter das zweite

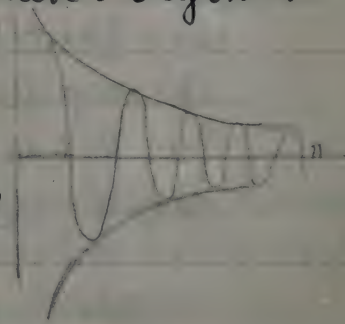
Integralzeichen zu setzen:

$$R(n,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f_+(x) - f(x+\xi))d\xi \cdot \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\xi}{2\sin\frac{1}{2}\xi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(f_-(x) - f(x+\xi))d\xi \cdot \frac{\sin}{2\sin}$$

welche beiden Integrale abzuschätzen sind. Jedoch brauchen wir nur das erste Integral zu betrachten, unter welchem die Schwankung nach rechts steht, da das zweite sofort in ähnlicher Weise betrachtet werden kann. Stellen wir uns vorerst die Schwankungscurve nach rechts her, d.h. also eine Curve für $f_+(x) - f(x+\xi)$. Wir wissen von ihr überhaupt nichts anderes als dass sie mit der Ordinate 0 beginnt.



Zeichnen wir nun noch die frühere Hülfscurve für beträchtliche Werte von n, so erhalten wir eine fluktuirende Curve, wie wir bereits sahen.



Um den weiteren Verlauf unserer Untersuchungen vorläufig überblicken zu können, bemerken wir im voraus folgendes:

Ein Blick auf die beiden letzten Figuren, lässt sofort erkennen, dass das Restglied für hinreichend grosses n schliesslich beliebig klein wird. Denn da, wo die Hülfscurve noch einen bestimmten Flächeninhalt umspannt, nämlich in der Nähe von $\xi = 0$, da ist die Schwankungsordinate unbeträchtlich, und da, wo die Schwankungsordinaten beträchtlicher sind, liefert die Hülfscurve keinen nennenswerten Flächeninhalt mehr. Wir können unser Restglied also folgendermassen schreiben:

$$R(nx) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\xi \left[\varphi_+(x) - f(x+\xi)\right] \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\xi}{2\sin\frac{1}{2}\xi}$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} d\xi \left[\varphi_-(x) - f(x+\xi)\right] \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\xi}{2\sin\frac{1}{2}\xi}$$

$$= R_1 + R_2$$

wo

$$R_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} S(\xi)\cdot T(\xi)\, d\xi.$$

Da nun die erste Welle eine besondere Behandlung verlangt, so wollen wir dieses R_1 wiederum zerlegen in

$$R_1 = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi}$$

wo $\alpha = \frac{2K\pi}{2n+1}$ eine Stelle bedeutet, an welcher

gerade eine Anzahl von Wellen zum Abschluss gekommen ist.
Nach der letzten Schätzung haben wir:

1') $\left| \int_0^{\alpha} T(\xi)\, d\xi \right| < \Pi$

2') $\left| \int_{\alpha}^{\pi} T(\xi)\, d\xi \right| < \frac{2}{(2n+1)\sin\frac{\alpha}{2}}$

Hierzu bemerken wir:
Bereits diese Abschätzung, welche sich nur auf die Hülfscurve $T(\xi)$ bezog, war nicht mit dem gewöhnlichen Mittelwertsatze gemacht; (diesen haben wir nur benutzt, um den Flächeninhalt der einzelnen Welle abzuschätzen), sondern durch Betrachtung der besonderen Gestalt der fluctuierenden Curve. Auch jetzt wird uns bei Betrachtung des Integrals $\int S(\xi) T(\xi) d\xi$ der blosse Mittelwertsatz nicht förderlich sein. Wir wollen vielmehr eine Zwischenbetrachtung einschalten.

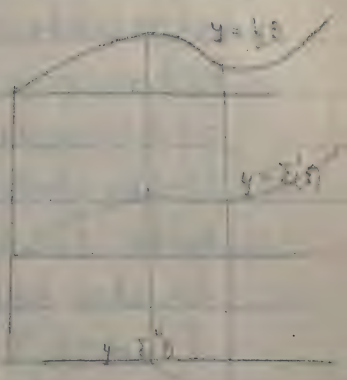
Zwischenbetrachtung.

Wir wollen einmal die Schwankungscurve $y = S(\xi)$ in zwei Teile spalten:

$$y = \Sigma'(\xi) \text{ und } y = \Sigma''(\xi)$$

wo $S = \Sigma' + \Sigma''$ sein soll und zwar soll $y = \Sigma'$

mit wachsendem ξ nie abnehmen und $y = \Sigma''$ nie wachsen. Wir erhalten dann aus Fig. 1 die in 2. und 3. dargestellten Curven. Solange $y = S(\xi)$ ansteigt, werden die zugehörigen Curvenzüge in die Fig. 2 übertragen, sobald $S(\xi)$ aber fällt, erhält die Curve $\Sigma'(\xi)$ an den entsprechenden Stellen constante Ordinaten. Ebenso umgekehrt. Carl Neumann nannte solche Curven „monotone Curven".



Betrachten wir jetzt einmal die Endordinaten der beiden Curven $\Sigma'(\pi)$ und $\Sigma''(\pi)$, wo also $\Sigma'(\pi)$ die Summe aller positiven Zuwächse bedeutet, welche unsere Curve S im Intervall von 0 bis π erfährt, und $\Sigma''(\pi)$ die Summe aller negativen Zuwächse im gleichen Intervalle, so ist hierbei zu bemerken, dass die ganze weitere Behandlung nur darauf ruht, dass $\Sigma'(\pi)$ und $\Sigma''(\pi)$ endlich sind.

Für solche Functionen, bei denen $\Sigma'(\pi)$ und $\Sigma''(\pi)$

begrenzt sind, hat C. Jordan den Namen „beschränkte Funktionen" eingeführt; wir nehmen ausdrücklich an, dass unsere Schwankungsfunktion S in diesem Sinne beschränkt sei.

Also: Wenn wir eine beschränkte Funktion in ihre beiden monotonen Componenten Σ' und Σ'' zerlegen, dann haben diese im ganzen Intervall von 0 bis π endliche Ordinaten

Durchführung der Abschätzung.

Wir rufen uns unsere eigentliche Aufgabe ins Gedächtnis zurück: Wir haben auszuschätzen

$$\int_0^{\pi} S(\xi)\,T(\xi)\,d\xi = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi} \quad \text{und} \quad \int_{-\pi}^{0} = \int_{-\pi}^{-\alpha} + \int_{-\alpha}^{0}$$

Zu dem Zwecke wollen wir das erste Integral spalten in drei Bestandteile, deren absolute Beträge wir zusammenaddieren:

$$\left|\int_0^{\alpha}\right| \leqq \left|\int_0^{\alpha}\{\Sigma'(\xi)-\Sigma'(\alpha)\}\cdot T(\xi)\,d\xi\right|$$

$$+\left|\int_0^{\alpha}\{\Sigma''(\xi)-\Sigma''(\alpha)\}\cdot T(\xi)\,d\xi\right| + \left|\int_0^{\alpha}\{\Sigma'(\alpha)+\Sigma''(\alpha)\}\cdot T(\xi)\,d\xi\right|$$

und ebenso das zweite Integral in die 3 Bestandteile:

$$\left|\int_{\alpha}^{\pi}\right| \leqq \left|\int_{\alpha}^{\pi}\{\Sigma'(\xi)-\Sigma'(\pi)\}\cdot T(\xi)\,d\xi\right| + \left|\int_{\alpha}^{\pi}\{\Sigma''(\xi)-\Sigma''(\pi)\}\,T(\xi)\,d\xi\right|$$

$$+\left|\int_{\alpha}^{\pi}\{\Sigma'(\pi)+\Sigma''(\pi)\}\cdot T(\xi)\,d\xi\right|.$$

Dass das Zeichen ≦ gesetzt werden muss, folgt daraus, dass die Summe der absoluten Beträge notwendig grösser oder gleich dem absoluten Betrage der Summe ist.

Jetzt ist die Abschätzung der drei rechts stehenden Glieder sehr leicht: Der absolute Betrag unserer Schwankung S verläuft von 0 bis α, etwa wie in Fig. 1.

Die Figuren 2) und 3) stellen die zu 1) gehörigen monotonen Curven dar. Zeichnen wir jetzt noch die Curven $\Sigma'(\xi) - \Sigma'(\alpha)$ bezw. $\Sigma''(\xi) - \Sigma''(\alpha)$, so werden dieselben nach 2') und 3') verlaufen.

Wir sehen hieraus:

$\Sigma'(\xi) - \Sigma'(\alpha)$ hat am linken Ende des Intervalls absolut genommen seine grösste Ordinate, und von da ab nimmt der absolute Betrag der Ordinaten immer mehr ab. Ebenso haben wir bei $y = \Sigma''(\xi) - \Sigma''(\alpha)$ die grösste Ordinate am linken Ende

des Intervalls. Das dritte Integral anbelangend ist aber $\Sigma'(\alpha) + \Sigma''(\alpha)$ überhaupt constant.
Jetzt können wir uns auch leicht die Function darstellen, die unter dem Integralzeichen stehen:

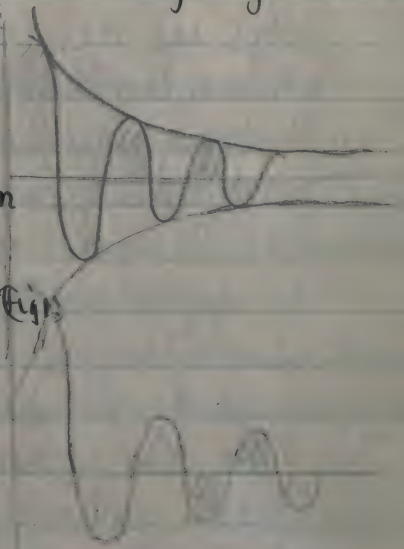


Fig. 1

Von der Curve $T(\xi)$ wissen wir bereits, dass der Flächeninhalt derselben von 0 bis α kleiner ist als der Inhalt der ersten Welle (Fig. 1). Diese $T(\xi)$ ist nun aber noch mit einem Faktor $\Sigma'(\xi) - \Sigma'(\alpha)$ multipliziert und nach den eben gegebenen Erläuterungen ist leicht zu sehen, dass die erste Welle auf Kosten der anderen nur noch begünstigt wird. Es wird also (Fig. 2) der Flächeninhalt der neuen Curve erst recht kleiner als der Inhalt der ersten Welle. Also werden wir unser Integral abschätzen, indem wir den absoluten Wert der ersten Welle abschätzen:

Wir fanden $I < II$ bei der Hülfscurve. Jetzt hat das umgeschriebene Rechteck einen Inhalt $[\Sigma'(\beta) - \Sigma'(\alpha)] \cdot \pi$. Da nun $\Sigma'(\alpha) = 0$ ist, so haben wir:

$$\left| \int_0^\alpha \{\Sigma'(\xi) - \Sigma'(\alpha)\} T(\xi)\, d\xi \right| < |\Sigma'(\alpha)| \cdot \pi$$

Ganz entsprechend erhalten wir für das zweite Integral:

$$\left| \int_0^\alpha \{\Sigma''(\xi) - \Sigma''(\alpha)\} T(\xi)\, d\xi \right| < |\Sigma''(\alpha)| \cdot \pi$$

und für das dritte:

$$\left| \int_0^\alpha \{\Sigma'(\alpha) + \Sigma''(\alpha)\} T(\xi)\, d\xi \right| < |\Sigma'(\alpha) + \Sigma''(\alpha)| \cdot \pi$$

Addieren wir, so erhalten wir:

$$\left| \int_0^\alpha S(\xi)\, T(\xi)\, d\xi \right| < \{|\Sigma'(\alpha)| + |\Sigma''(\alpha)| + |\Sigma'(\alpha) + \Sigma''(\alpha)|\}$$

Jetzt haben wir in analoger Weise das Integral

$$\int_\alpha^\pi S(\xi)\, T(\xi)\, d\xi$$

abzuschätzen. Hierzu sind bereits die nötigen Einleitungen getroffen. Wir hatten nämlich:

$$\left| \int_\alpha^\pi S(\xi)\, T(\xi)\, d\xi \right| \leqq \left| \int_\alpha^\pi \{\Sigma'(\xi) - \Sigma'(\pi)\} T(\xi)\, d\xi \right|$$
$$+ \left| \int_\alpha^\pi \{\Sigma''(\xi) - \Sigma''(\pi)\} T(\xi)\, d\xi \right| + \left| \int_\alpha^\pi \{\Sigma'(\pi) + \Sigma''(\pi)\} T(\xi)\, d\xi \right|.$$

Diese Integrale sind nun so eingerichtet, dass der Klammerfactor, mit welchem $T(\xi)$ multiplizirt wird, von links nach rechts abfällt, oder doch sicher nicht ansteigt. Da nun $T(\xi)$

eine fluktuierende Funktion ist, die nach rechts abfällt, so gilt a fortiori: Die einzelnen Integrale sind kleiner als der jeweilige Betrag der ersten Halbwelle. Setzen wir daher bei allen drei Gliedern der rechten Seite unserer obigen Ungleichung den Maximalwert des Klammerfaktors vor die bezügliche Integralzeichen, so erhalten wir unter Benutzung der Gleichung 2' auf Seite ?

$$\left|\int_0^\pi S(\xi)\cdot T(\xi)\,d\xi\right| < \left|\Sigma'(\alpha)-\Sigma'(\pi)\right|\frac{2}{(2n+1)\sin\frac{\alpha}{2}}$$
$$+\left|\Sigma''(\alpha)-\Sigma''(\pi)\right|\frac{2}{(2n+1)\sin\frac{\alpha}{2}}+\left|\Sigma'(\pi)-\Sigma''(\pi)\right|\frac{2}{(2n+1)\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Durch geeignete Zusammenziehung bekommen wir also

$$\left|\int_\alpha^\pi S(\xi)\,T(\xi)\,d\xi\right| < \left\{\left|\Sigma'(\alpha)-\Sigma'(\pi)\right|+\left|\Sigma''(\alpha)-\Sigma''(\pi)\right|+\left|\Sigma'(\alpha)+\Sigma''(\alpha)\right|\frac{2}{(2n+1)\sin}\right.$$

Die beiden durch Abschätzung gefundenen Werte der Integrale haben wir einzusetzen in unsere Gleichung für R_1

$$|R_1| \leqq \frac{1}{\pi}\left|\int_0^\alpha S(\xi)\,T(\xi)\,d\xi\right| + \frac{1}{\pi}\left|\int_\alpha^\pi S(\xi)\,T(\xi)\,d\xi\right|$$

Um den Rest $R(n,x)$ zu bestimmen, brauchen wir noch R_2 in ganz entsprechender Weise abzuschätzen.

Wir bemerken hierzu noch, dass diese Restgliedabschätzung in jedem concreten Falle noch wesentlich verbessert werden kann. Sie ist deshalb so unbestimmt gefasst, weil die Function $f(x)$, mit der wir hier zu thun haben, noch so sehr allgemein ist.

Die Convergenz der unendlichen Fourier'schen Reihe.

Um einzusehen, dass der Rest für unendlich grösses n verschwindet, nehmen wir $\alpha = \frac{2K\pi}{2n+1}$ so nahe an 0 an, dass der Bestandteil $\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\alpha} S(\varphi)\,T(\varphi)\,d\varphi\right|$ vermöge unserer Abschätzung kleiner wird als $\frac{\varepsilon}{4}$, wo ε eine beliebig kleine vorgegebene Zahl ist.

Um auch $\frac{1}{\pi}\left|\int_{\alpha}^{\pi} S(\varphi)\,T(\varphi)\,d\varphi\right|$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{4}$ zu machen, nehmen wir nun noch die Gliederzahl n der Fourier'schen Reihe so gross an, dass eben dieser zweite Bestandteil unseres R_1, obgleich $\sin\frac{\alpha}{2}$ im Nenner steht, kleiner wird als $\frac{\varepsilon}{4}$.

Ebenso wie $|R_1|$ lässt sich nun auch $|R_2|$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ machen und wir können sagen:

nimmt man nur die Gliederzahl n hinreichend gross, so kann man den Rest $R(n\,x)$ der Reihe immer $< \varepsilon$ machen.
Damit ist zugleich bewiesen, dass für hinreichend grosses n unsere endliche Reihe direct gleich der unendlichen Reihe

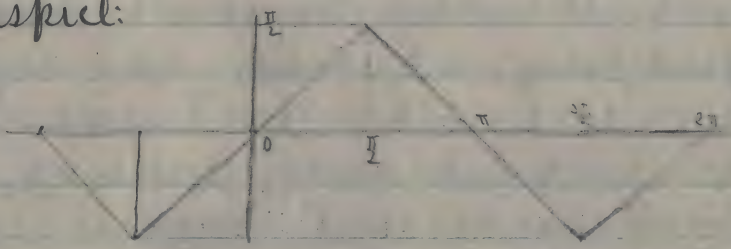
$$\tfrac{1}{2}\{f(x+s)+f(x-s)\} = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty} a_\nu \cos \nu x + \sum_1^{\infty} b_\nu \sin \nu x$$

wird, und dass diese Reihe unter denselben Bedingungen, wie oben hervorgehoben, convergiert.
Dieses war der Dirichlet'sche Convergenz-Beweis (Vorzug)
Anmerkung: Während die Taylor'sche Reihe ihre Coefficienten dem Verhalten der Function an einer einzigen Stelle entnimmt, so berechnen sich die Coefficienten der Fourier'schen Reihe aus dem Gesamtverlauf der Function zwischen 0 und 2π.
In Uebereinstimmung mit diesem Bildungsgesetze der Coefficienten liefert die Taylor'sche Reihe eine Serie von Annäherungscurven, die sich an der einen Stelle $x=a$ immer enger und enger an die gegebene Curve anschmiegen, während die Fourier'sche Reihe Annäherungscurven liefert, die

über das ganze Intervall hin möglichst der Form der gegebenen Curve zu folgen bestrebt sind.

Der Verlauf der successiven Annäherungscurven

1) Beispiel:



Dieser Linienzug kann durch eine Fourier'sche Reihe angenähert werden, da er um 2π periodisch ist. (Durch eine Taylor'sche Reihe würde nur eine der geraden Linien darstellbar sein).

Da $f(x) = -f(-x)$ (ungerade Function) so müssen alle Cosinusglieder fortfallen incl. des constanten Gliedes. Es ist also

$$b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\sin\nu z\,dz$$

zu berechnen. Wir spalten in:

$$b_\nu = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{4\pi}{2}}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right]$$

da auch die Function unter dem Integralzeichen um 2π periodisch ist.

Nun ist $f(z) = z$, bezw. $\pi - z$ so dass:

$$b_\nu = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} z \sin \nu z\, dz + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\pi - z) \sin \nu z\, dz\right]$$

Durch partielle Integration ergiebt sich sofort:

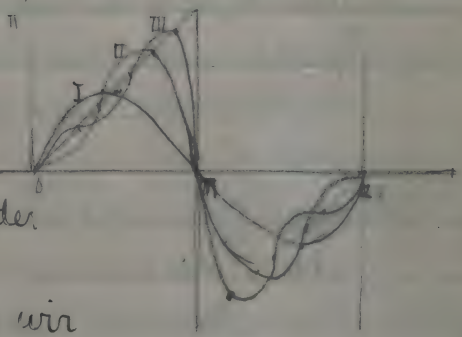
$$b_\nu = \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{z}{\nu}\cos \nu z + \frac{1}{\nu^2}\sin \nu z\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} + \left[+\frac{z}{\nu}\cos \nu z - \frac{1}{\nu^2}\sin \nu z - \frac{\pi}{\nu}\cos \nu z\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right\}$$

Man sieht hieraus, diejenige b_ν, deren Indices gradzahlig sind, werden $= 0$, die ungraden b_ν haben den Wert $b_\nu = \frac{4}{\pi \nu^2}(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}$, also

$b_0 = 0,\ b_1 = \frac{4}{1\cdot\pi},\ b_2 = 0\ \ b_3 = -\frac{4}{9\pi},\ b_4 = 0,\ b_5 = \frac{4}{25\pi}$ . . . .

Die Reihe hat also die Form:

1) $$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 3x}{9} + \frac{\sin 5x}{25} + - - - - -\right)$$



Da wieder $f(x) = -f(-x)$ so bleiben wieder nur die sin. Glieder stehen:

$$b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z) \sin \nu z\, dz \text{ oder}$$

$$b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} - - -$$

Da $f(z) = z$, so erhalten wir durch partielle Integration:

$$b_\nu = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{z}{\nu}\cos \nu z + \frac{1}{\nu^2}\sin \nu z\right]_0^{\pi}$$

Hieraus findet man: $b_\nu = -\frac{2}{\nu}(-1)^\nu$, also ist:

$b_1 = 2\cdot 1$, $b_2 = 2(-\frac{1}{2})$, $b_3 = 2\cdot(\frac{1}{3})$, $b_4 = 2\cdot(-\frac{1}{4})$ . . . .

sodass die Reihe die Form hat:

2) $$f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - - - - -\right)$$

Man bemerkt: Die successiven Annäherungscurven, welche an sich lauter stetige Curven sind, schmiegen sich an die Unstetigkeiten der vorgelegten Curven in der Weise an, dass die verticalen Linienstücke, welche man zwischen den Sprungstellen einschalten kann, mit approximiert werden.

Im Anschluss hieran folgen einige Resultate:

1. Regel: Die erste Annäherungscurve hat mit der darzustellenden Curve zwischen 0 und π mindestens einen, die zweite mindestens zwei, die dritte mindestens 3 Schnittpunkte u.s.w.
2. Regel: Die Convergenz der Fourier'schen Reihe ist überall vorhanden, auch in der Nähe der Sprungstellen; jedoch ist sie hier unendlich verlangsamt. In der Sprungstelle selbst ist sie wieder vortrefflich.

§ Gliedweise Integration und Differentiation der Fourier'schen Reihe.

Integration: Aus den Figuren sieht man zunächst unmittelbar, dass die gliedweise Integration statthaft ist. Wir wollen es

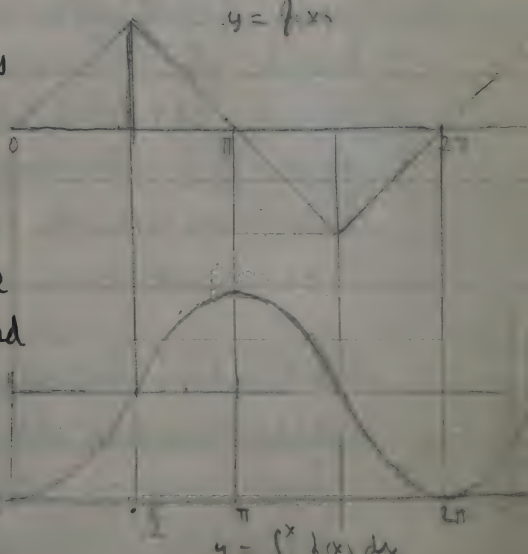
aber noch auf andere Weise klar zu machen suchen: Wir wollen bei beiden Reihen einmal wirklich die gliedweise Integration ausführen wir erhalten:

1) $\int f(x)\,dx = C + \frac{\pi}{4}\left(-\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{27} - \frac{\cos 5x}{125} + \cdots\right)$

Die Frage wird sein: Ist diese Reihe wirklich das Integral von $f(x)$? Ferner bilden wir

2) $\int f(x)\,dx = C + 2\left(-\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 3x}{9} + \cdots\right)$

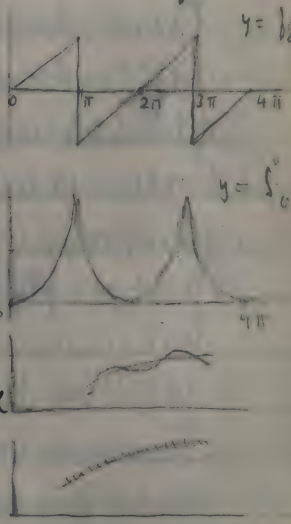
und fragen auch hier nach der Berechtigung der Integration.



Construieren wir uns beide Fälle durch, so finden wir: Die Integralcurve ist eine periodische Curve ohne Unstetigkeit, bestehend aus verschiedenen parabolischen Ästen, die man also gewiss in eine Fourier'sche Reihe entwickeln kann.

Wenn man nun die so definierte Integralcurve direct in eine Fourier'sche Reihe entwickelt, so bekommt man in der That dieselbe Reihe, die wir durch gliedweise Integration hergestellt hatten. Es ist also in diesen beiden Beispielen die Berechtigung der gliedweisen Integration bewiesen.

Differentiation: Man darf eine unendliche Reihe gliedweise differentiieren, wenn die Annäherungscurven mit der Originalcurve nicht nur in den Ordinaten, sondern auch in den Richtungen ihrer Tangenten bei wachsendem n immer mehr zusammenfällt. Während nun die Fig. des Beispiels 1 eine richtige Annäherung darbietet, so dass die gliedweise Differentiation gestattet ist, so zeigt das zweite Beispiel, besonders in der Sprungstelle, eine unrichtige Annäherung, so dass die gliedweise Diff. wohl nicht richtig sein kann.



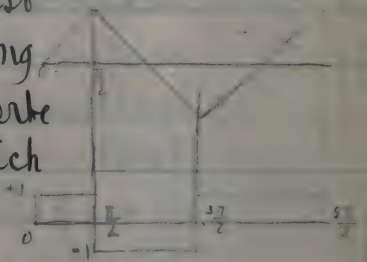
Differentiieren wir beide Reihen gliedweise, so erhalten wir:

1) $\frac{df}{dx} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \cdots\right)$

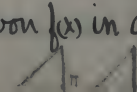
Diese Reihe convergiert thatsächlich. Ferner:

2) $\frac{df}{dx} = 2(\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cdots)$

welche Reihe gar nicht convergiert, so dass der Schluss aus den Figuren bestätigt wird. Versuchen wir es jetzt direct aus den Originalcurven die Differentialcurven herzustellen, so erhalten wir für (1) eine periodische Function, die sich sofort durch eine Fourier'sche Reihe darstellen lässt. Führt man die Reihenentwicklung für diese durch die Fig. definierte Curve durch, so kommt man wirklich auf die Reihe, die wir uns durch gliedweise Diff. hergestellt hatten.



Anders ist es bei 2). Hier steigt die Originalcurve überall gleichmässig an, nur an den Unstetigkeitsstellen $\pi, 3\pi, 5\pi \ldots$ fällt sie plötzlich herab. Also ist der Diff. quotient überall constant mit Ausnahme dieser Unstetigkeitsstellen, wo er plötzlich auf $-\infty$ fällt. Da dies den Bedingungen für die Entwicklung einer Function in eine Fourier'sche Reihe widerspricht, so können wir auch den Diff. quotient von f(x) in diesem Fall gar nicht durch eine F. R. darstellen.



Ausdehnung der Integralrechnung auf mehrere Variable.

Die mehrgliedrigen Differentialausdrücke.

Das exakte Differential bei zwei Variabeln.

$F(x) = \int f(x)\,dx$ knüpfte an folgende beiden zur Integration führenden Ideen an:

1) An die Umkehr des Diff. quotienten $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, indem bei gegebenem $f(x)$ nach $F(x)$ gefragt wurde, und

2) an den direkten Grenzprozess einer Summe, also an

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \Sigma(n) = \int f(x)\,dx.$$

Beide Formulierungen lassen sich nun auf mehrere Variable ausdehnen.

1.) Was den ersten Punkt anbetrifft, so wird eben nicht nur eine solche Gleichung, sondern mehrere gegeben, und speziell bei zwei Variabeln die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Wenn wir in diesem Falle x und y sich um dx bezw. um dy ändern lassen, so erscheint bekanntlich das zugehörige Differential dF

in der Form:

$$dF = M\,dx + N\,dy$$

wo M und N Funktionen von x und y sind. Die umgekehrte uns hier in der Integralrechnung interessierende Frage wird sein, wenn man aus einem solchen Ausdruck: $M\,dx + N\,dy$ eine Function $F(x,y)$ selbst bestimmen kann und wie man dieselbe findet?

Wenn nun unser Ausdruck so beschaffen ist, dass

$$M = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \qquad N = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$$

ist, so gebraucht man auch den besonderen Ausdruck: dF ist ein exactes Differential. Wir können daher die beiden letzten Fragen auch so formulieren: Wann ist unser Ausdruck $M\,dx + N\,dy$ ein exactes Differential und wenn es ein exactes Differential ist wie finde ich dann die $F(x,y)$?

2) Was den zweiten Gesichtspunkt angeht, so ist da eine $f(x,y)$ gegeben und es soll das Doppelintegral

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

bestimmt werden.

Wir wollen diese zweite Frage jedoch jetzt nicht weiter verfolgen, da wir sie in Kürze noch eingehend zu behandeln haben; bemerken jedoch hier, dass wir auch das Doppelintegral als Grenze einer Summe definieren werden.

Unsere erste Frage lautete: Wann ist

$$M\,dx + N\,dy$$

ein exactes Differential?

Dabei wollen wir nun hier nicht feinere Definitionen geben, d.h. wir wollen uns nicht um Unstetigkeiten u.s.w. kümmern; M und N sollen stetige differentiierbare Funktionen sein.

Man erkennt nun sogleich, dass M und N nicht beliebig sein dürfen, dass sie vielmehr die partiellen Diff.quotienten des $F(x,y)$ nach x bezw. y sein müssen. Nun ist im Falle stetiger differentiierbarer Diff.quotienten, wie wir in der Diff.rechnung zeigten

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\partial x}.$$

Daher ergiebt sich als notwendige Bedingung:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Nun behaupten wir, das ist auch ausreichend. Oder, mit anderen Worten: wenn obige Bedingung erfüllt ist, so ist auch immer eine $F(x,y)$ zu finden. Wir erkennen dies am einfachsten, indem wir uns an einer Function, die durch M und N ausgedrückt ist, mittels Differentiation von der Richtigkeit dieser Funktion überzeugen. Dabei müssen wir vorsicht gebrauchen in der Verwendung der Buchstaben, und zwar wollen wir die Integrationsbuchstaben über welche hier integriert wird, ξ und η nennen, zum Unterschiede von x und y, welche an der Integration gar nicht beteiligt sind, sondern entweder Integrationsgrenzen vorstellen, oder als Parameter in den Integranden eingehen.

Wir bilden uns den Ausdruck:

$$\int_a^x M(\xi, y)\, d\xi + \int_b^y N(x, \eta)\, d\eta - \int_a^x d\xi \int_b^y d\eta \left\{ \frac{\partial M(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial N(\xi,\eta)}{\partial \xi} \right\}$$

und bezeichnen ihn mit $F(x,y)$.

(Das letzte Doppelintegral ist nur ein wieder-

holtes einfaches Integral; wir brauchen zu seiner Definition nicht etwa einen neuen Grenzübergang).

Differentieren wir dieses $F(x,y)$ nach x, so bekommen wir für das erste Integral einfach die Funktion unter dem Integralzeichen. Bei dem zweiten Integral machen wir Gebrauch von dem Satze, unter dem Integralzeichen differentiieren zu können. Beim dritten Integrale ist die Reihenfolge der Integration gleichgiltig, so daß sich dasselbe schreiben läßt in der Form:

$$\int_b^y d\eta \int_a^x d\xi \frac{\partial M(\xi,\eta)}{\partial \eta}$$

Bezeichnen wir die Klammergröße, welche eine Funktion von x und η ist, mit $\phi(x,\eta)$ so haben wir $\int_b^y \phi(x\eta)\, d\eta$. Jetzt differentiieren wir nach x und bekommen, indem wir unter dem Integralzeichen differentiieren:

a) $$\int_b^y \frac{\partial \phi(x,\eta)}{\partial x} dx.$$

Nun ist $\phi(x,\eta)$ ja gleich $\int_a^x \frac{\partial M(\xi,\eta)}{\partial \eta} d\xi$. Dies soll also nach der oberen Grenze differentiiert werden. Das giebt, indem

man gleich für ξ das x einsetzt:

$$\frac{\partial \Phi(x,\eta)}{\partial x} = \frac{\partial M(x,\eta)}{\partial \eta}$$

Unser Ausdruck (a) geht also über in $\int_b^y \frac{\partial M(x,\eta)}{\partial \eta} d\eta$ und wir erhalten:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = N(x,y) + \int_b^y \frac{\partial N(x,\eta)}{\partial x} d\eta - \int_b^y \frac{\partial M(x,\eta)}{\partial \eta} d\eta .$$

Es ist also

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

wie wir wünschten. Also diese Probe hat $F(x,y)$ bestanden, und wenn wir analog auch $\frac{\partial F}{\partial y}$ ausrechnen, indem wir die einzelnen Integrale nach y differentiieren, so werden wir erhalten:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Resultat: Wenn ein Differentialausdruck $M\,dx + N\,dy$ vorgelegt ist und die Gleichung $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ besteht, dann haben wir es wirklich mit einem exakten Differential zu tun, nämlich mit dem Differential der Funktion:

$$F(x,y) = \int_a^x M(\xi,y)\,d\xi + \int_b^y N(x,\eta)\,d\eta - \int_a^x d\xi \int_b^y d\eta \left\{ \frac{\partial M(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial N(\xi,\eta)}{\partial \xi} \right\}$$

Dies ist die analytische Grundlage für die weiteren Betrachtungen.

Wir wollen hinzu uns ein Beispiel durchrechnen welches wir in der Folge noch weiter benutzen werden.

Es soll sein:

$$M\,dx + N\,dy = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2},$$

also:

$$M = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad N = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Ist der gegebene Ausdruck ein exaktes Diff.? Dass dies der Fall ist sieht man gleich; es ist nämlich $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Jetzt bilden wir die Funktion $F(x,y)$ nach unserer Formel und verschmelzen dabei den Einfluss der unteren Integrationsgrenzen direkt mit den Integrationskonstanten. Wir erhalten dann:

$$F(x,y) = \int_{\cdot}^{x} \frac{-y\,d\xi}{x^2+\xi^2} + \int_{\cdot}^{y} \frac{x\,d\eta}{x^2+\eta^2} - \int_{\cdot}^{x} d\xi \int_{\cdot}^{y} d\eta \frac{-\xi^2+\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2} + C$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C.$$

Ausdehnung auf mehr Variable.

Wir kommen erst noch einmal auf das Bildungsgesetz unserer Formel für $F(x,y)$ zurück: Da $M(x,y)$ der partielle Diff.quot. von $F(x,y)$ nach x sein sollte, so können wir auch schreiben:

$$F = \int^x M(\xi y)\,d\xi + \phi(y)$$

wo die Integrationsconstante $\phi(y)$ nur von y abhängig ist. Ferner können wir jetzt schreiben:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int^x \frac{\partial M(\xi y)}{\partial y}\,d\xi + \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

und hieraus den Wert von $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ ablesen; nämlich

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N(xy) - \int^x \frac{\partial M(\xi y)}{\partial y}\,d\xi = N(xy) - \int^x \frac{\partial N(\xi y)}{\partial \xi}\,d\xi$$

Dieser Ausdruck hängt nur von y ab, nicht von x, wie aus der ganzen Entstehung hervorgeht und übrigens auch formal deutlich ist. Durch Integration bekommen wir also:

$$\phi = \int^y d\eta \left\{ N(x\eta) - \int^x \frac{\partial N(\xi\eta)}{\partial \xi}\,d\xi \right\} + C$$

wo C von x und y unabhängig ist. Dieser Wert von ϕ in die Formel für $F(xy)$ eingesetzt, ergibt sofort die schon diskutierte Formel:

$$F(xy) = \int_a^x M(\xi y)\,d\xi + \int_b^y N(x\eta)\,d\eta - \int_a^x d\xi \int_b^y d\eta\, \frac{\partial N(\xi\eta)}{\partial \xi} + C$$

Es mögen jetzt drei Variable vorhanden sein, also der Ausdruck

$$M(xyz)\,dx + N(xyz)\,dy + P(xyz)\,dz$$

vorliegen. Wann ist dieser Ausdruck ein

exaktes Differential?
Wir wissen die notwendigen Bedingungen sind

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Diese drei Bedingungen sind aber auch hinreichend, sie genügen also, um unseren Diff. Ausdruck als exaktes Differential erscheinen zu lassen. Um dies zu beweisen, gehen wir in ganz entsprechender Weise vor, wie oben. Wir werden setzen können:

$$F(x\,y\,z) = \int^x M(\xi\,y\,z)\,d\xi + \Phi(y\,z).$$

Denn nach x differenziiert ergibt dieser Ausdruck grade M, also kann $F(x\,y\,z)$ sich von dem Integral $\int^x M(\xi\,y\,z)\,d\xi$ nur um eine Grösse Φ unterscheiden, die von y und z abhängig ist. Wir erhalten hieraus nun:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int^x \frac{\partial M(\xi\,y\,z)}{\partial y}\,d\xi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = N(x,y,z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \int^x \frac{\partial M(\xi\,y\,z)}{\partial z}\,d\xi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = P(x,y,z)$$

Durch Multiplikation der beiden Gleichungen mit dy bezw. dz und Addition, erhalten wir:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,dz = \{N(x\,y\,z) - \int^x \frac{\partial N(\xi\,y\,z)}{\partial \xi}\,d\xi\}\,dy + \{P(x\,y\,z) - \int^x \frac{\partial P(\xi\,y\,z)}{\partial \xi}\,d\xi\}\,dz$$

Die Frage lautet nun: Können wir hieraus das Φ bestimmen? Wir sehen nur dann, wenn die rechte Seite für sich genommen ein exactes Differential ist. Wir haben also die Frage eines dreigliedrigen Differentials auf die eines zweigliedrigen zurückgeführt. Daher muss jetzt die Bedingung bestehen:

$$\frac{\partial N}{\partial z} - \int^x \frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial z} d\xi = \frac{\partial P}{\partial y} - \int^x \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial y} d\xi .$$

Diese beiden Ausdrücke links und rechts sind nun nach Voraussetzung in der That einander gleich; denn aus $\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$ folgt sofort $\frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial y}$. Wir haben also wirklich ein exactes Differential und können nach den bekannten Vorschriften integrieren. Wir können jetzt auch sofort folgenden allgemeinen Satz für n Variable aussprechen: Ein Ausdruck

$$M(x\ y\ z \cdots)\,dx + N(x\ y\ z \cdots)\,dy + \cdots$$

ist ein exactes Differential, wenn die Gl^en

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad - \quad - \quad - \quad -$$

bestehen, denn alsdann kann man stets setzen:

$F(x\,y\,z\,\dots) = \int^{x} M(\xi\,y\,z\,\dots)\,d\xi + \phi(y\,z\,\dots)$

wo $\phi(y\,z\,\dots)$ selbst wieder durch ein exaktes Differential von $n-1$ Variabeln definiert wird.

Eine geometrische Deutung des zweigliedrigen Differentials.

Gehen wir wieder zu den Differentialfunktionen von zwei Variabeln zurück, und fragen wir, was für ein geometrisches Bild können wir mit diesen analytischen Formulierungen verknüpfen, und insbesondere, was bedeutet es geometrisch, wenn ein exaktes Differential vorliegt.

Es sei der Ausdruck gegeben $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$, den wir gleich dz setzen wollen. Wir führen ein räumliches Coordinatensystem ein und bezeichnen die Coordinaten eines beliebigen Punktes im Raume mit $x\,y\,z$. Unsere Gleichung $M\,dx + N\,dy = dz$ sagt dann aus: wenn die Coordinaten eines Punktes $x\,y$ sich in bestimmter Weise ändern, so ändert sich auch die zugehörige z Ordinate im Raume, und zwar werden

verschiedenen Fortschreitungsrichtungen der x, y auch verschiedene Fortschreitungsrichtungen des Raumpunktes x y z zugehören. Aus der vorgegebenen Gleichung geht aber hervor, dass die Endpunkte x' y' z' welche den unendlich kleinen Aenderungen $dx = x' - x$ $dy = y' - y$ $dz = z' - z$ entsprechen ein ebenes Flächenelement im Raume überdecken, da die Beziehung zwischen dx dy dz linear ist. (Aus der analytischen Geometrie ist ja auch bekannt, dass $M(x'-x) + N(y'-y) = z'-z$ die Gleichung einer Ebene ist, die durch den festen Punkt x y z geht).
Die Gleichung $M\,dx + N\,dy = dz$ ordnet also jedem Raumpunkte x y z ein durch den Raumpunkt gehendes ebenes Flächenelement zu. Und zwar bleibt dieses Flächenelement sich selbst parallel, wenn der Punkt x y z vertikal hinauf oder hinab geht, weil die Coefficienten M und N nicht von z abhängen.
Nehmen wir einmal an: dz sei ein exaktes Differential, nämlich:

$$dz = dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

so ist

$$z = F(x,y) + C$$

d.h. wir haben damit eine Schar paralleler gestellter Flächen im Raume. In jedem Punkte einer solchen Fläche gibt es eine Tangentialebene, und zwar sieht man, dass in dieser auch das jedem Punkte zugeordnete Flächenelement liegen muss. Soll also ein exaktes Differential vorliegen, dann muss es möglich sein, alle diese Ebenen-Stückchen als Tangential-Ebenenelemente einer Fläche $z = F(x,y) + C$ aneinander zu legen, so dass sie zusammengenommen eine Schar von Flächen $z = F(x,y) + C$ überdecken.

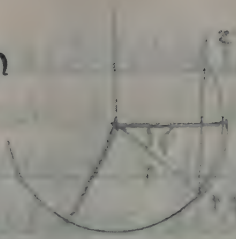
Dass dieses nicht immer möglich ist, wollen wir an Beispielen zeigen. Jedoch vorerst erproben wir den eben aufgestellten Satz an unserem letzten Beispiele. Daselbst war gegeben

$$dz = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}.$$

Wie liegen hier die Flächenelemente?

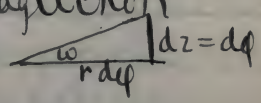
Für wir Polarcoordinaten
ein, so ist

$$r = \sqrt{x+y^2},\quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$



Die Frage ist wie sieht
das Ebenen element, welches wir mittels
unserer Formel durch den Punkt mit
den Cylindercoordinaten z, r, φ legen?
Der Einfachheit wegen, wollen wir z
zunächst = 0 setzen, also den Punkt in
die xy-Ebene verlegen, was ja keinen
Einfluss auf die Richtung des Ebenen-
Elementes hat.
Bestimmen wir zunächst die Schnitt-
linie desselben mit der xy-Ebene. Wir
erhalten: $-y\,dx + x\,dy = 0$, also $dx : dy = x : y$,
d.h. die Schnittlinie geht durch den
Anfangspunkt des Coordinatensystems.
Unser Flächenelement hat dabei folgende
Neigung gegen die Horizontale:
r möge constant bleiben und φ um dφ
zunehmen. Wir schreiten dann, bei
constant gehaltenem r, um $r\,d\varphi$ in horizontaler
Richtung weiter und haben jetzt das

zugehörige dz zu bestimmen. Nun ist ja nach unseren Rechnungen $dz = d\varphi$; mithin erhalten wir den fraglichen Winkel ω Fig; aus der Gleichung $\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{r}$.



Wir können daher sagen: In unserem Beispiele ist jedem Raumpunkte ein durch ihn gehendes Ebenen-Element zugeordnet, welches das horizontale Perpendikel enthält, das man von dem Raumpunkte aus auf die z-Axe fällen kann und welches Ebenen-Element mit der Horizontalen einen Winkel ω einschliesst, so dass $\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{r}$ ist, unter r die Länge des Perpendikels verstanden.

Nun war

$$z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C$$

also $z = \varphi + C$

d.h. unsere Fläche ist eine Schraubenfläche, deren Schnittlinien mit Horizontal-Ebenen Gerade sind, die durch die z-Axe gehen.

Dies ist also das Beispiel eines exakten

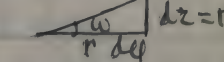
Differentials, wo also thatsächlich die Elementestückchen, welche jedem Punkte zugeordnet werden können, sich als Tangential-Ebenenelemente von Flächen $z = F(x,y) + C$ aneinander legen lassen, derart, dass sie zusammengenommen jede dieser Flächen vollständig überdecken. Achten wir in unserem letzten Beispiele noch einmal auf die Neigung des in der Fig. 7 angedeuteten Flächenelements, so ergiebt sich aus der Gl. $\operatorname{tg} w = \frac{1}{r}$, dass das Flächenelement für $r=0$ senkrecht steht und für $r=\infty$ horizontal, und dass es überhaupt um so steiler ist, je kleiner das r ist. Das stimmt durchaus mit der durch die Gl. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C$ gegebenen wendeltreppartigen Schraubenfläche überein. Als zweites Beispiel nehmen wir:

$$dz = -y\,dx + x\,dy.$$

und zwar sehen wir, dass das kein exactes Differential ist, denn es ist $\frac{\partial M}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = +1$. Unter Benutzung der obigen Bezeichnung können wir auch schreiben: $dz = r^2 d\varphi$.

Im Hinblick auf die letzten Figuren können wir jetzt auch den Satz aufstellen: Wieder ist jedem Punkte x y z ein Flächenelement zugeordnet, welches durch das von diesem Punkte auf die z-Axe gefällte Perpendikel hindurchgeht.

Um die Neigung des Flächenelementes gegen die Horizontalebene zu bestimmen, schneiden wir dasselbe wieder mit einem Cylinder x = const. und ersehen aus der Hülfsfigur, dass sich jetzt



im Unterschiede zu vorhin die Gl. tg w = r ergiebt. Für r = 0 steht also jetzt das Flächenelement horizontal, für r = ∞ vertikal und überhaupt steht das Element um so steiler, je grösser r ist. Hieraus ist für die geometrische Anschauung ersichtlich, dass es unmöglich ist, mit den Flächenelementen irgend eine Schraubenfläche zu überdecken

Charakteristischer Unterschied des exacten und des unexacten Differentials.

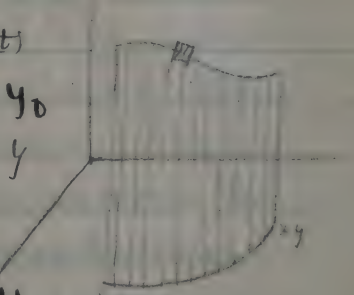
Wir wollen jetzt untersuchen ob mit solchen unexacten Differentialen nicht doch ein Integrationsproblem verbunden ist. Wir setzen zu diesem Zwecke den Ausdruck $M\,dx + N\,dy$ gleich dz und legen in der xy-Ebene von einem Anfangspunkte $x_0 y_0$ nach einem zweiten Punkte xy irgend eine Curve und addieren nun der Curve entlang gehend alle Incremente dz zusammen. Die Gl. der Curve sei gegeben durch

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

und für $t = t_0$ sei x_0 und y_0

" " $t = t$ " x " y

gegeben. Wir können dann schreiben:



$$dz = \{M(\varphi,\psi)\cdot\varphi' + N(\varphi,\psi)\cdot\psi'\}\,dt$$

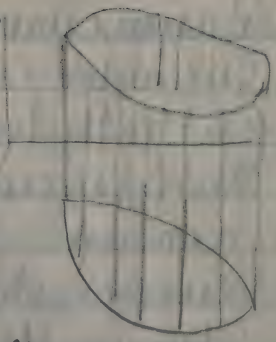
Jetzt ist die Integration sofort ausführbar und wir erhalten:

$$z - z_0 = \int_{t_0}^{t} (M\varphi' + N\psi)\,dt.$$

Hierdurch ist uns also eine ganz bestimmte

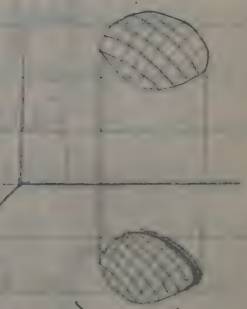
Raumcurve gegeben, die auf dem vertikalen Cylinder liegt, welches die Curve der xy-Ebene enthält. Wir wollen eine solche Curve eine Integralcurve unseres Differentialausdruckes nennen. Zu jedem Punkte dieser Integralcurve gehört nun ein Flächenelement, das in der Curve liegt, so dass man eine fortlaufende Reihe dieser Elemente, Integralstreifen genannt, längs der Integralcurve bilden kann.
Dies wollen wir so ausdrücken:
Auch wenn der vorgelegte Differential-Ausdruck kein exaktes Differential ist, auch dann gibt es unbegrenzt viele Integralcurven, bezw. Integralstreifen im Raume. Also es ist im Allgemeinen nicht möglich diese Curven oder Streifen zu einer Schar von Flächen zusammenzufassen.
Verfolgen wir noch genauer den Unterschied zwischen exakten und unexakten Differentialen. Wir wollen von einem Punkte $x_0 y_0$ auf zwei verschiedenen Wegen dem Punkte

$x\,y$ zustreben. Dem Punkte $x_0\,y_0$ sei in bestimmter z zugeordnet. Wir wollen uns jetzt die beiden Curven zeichnen, die sich im Raume ergeben.



Wir errichten auf beiden Wegen die Cylinder und erhalten zwei verschiedene Integralcurven im Raume, auf diesen Cylinder liegend. Die Frage ist, wenn liefern diese beiden Curven am Endpunkte dieselbe z-Ordinate? Die Antwort lautet, wenn ein exactes Differentialvorliegt, weil dann beide Integralcurven auf der durch den Punkt $x_0\,y_0\,z_0$ festgelegten Fläche $z = F(x,y) + C$ liegen und sich also schneiden müssen. Andernfalls ist hierfür kein Grund vorhanden. Der Wert des Integrals ist in einem Falle vom Wege unabhängig, im anderen Falle vom Wege abhängig. Man sagt in solchem Falle, wo man von einem Punkte $x_0\,y_0$ beginnend, einen Curvenzug zum

Anfangspunkt $x_0 y_0$ zurück durchläuft:
Man beschreibt einen Kreisprocess.
Wir können daher auch so sagen:
Das exakte Differential liefert bei einem beliebigen Kreisprocess, d.h. bei Integration längs einer geschlossenen Curve immer den Betrag 0, während beim unexakten Differential hierfür kein Grund vorliegt.
Hierin liegt nicht nur eine Eigenschaft des exakten Differentials, sondern auch eine Definition desselben.



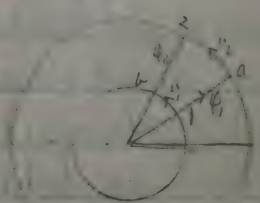
Zeichnen wir im Falle des exakten Differentials ein Netzwerk in der xy-Ebene in unseren Curvenzug ein, so wird auch im Raume ein Netzwerk entstehen welches eine der Flächen $z = F(x\,y) + C$ überdeckt.
Hieraus, dass jeder Kreisprocess Null liefert ist das Wesen des exakten Diffs. zu sehen. Denn es gruppieren sich dann notwendig die Integralcurven zu Flächen im Raume zusammen.

Verfolgen wir dies an unserem Beispiele: Wir ziehen zwei Strahlen φ_1 und φ_2 und zwei Kreise mit den Radien r_1 und r_2.
Gehen wir nun vom Punkte 1 nach 2 in der xy-Ebene, so erhalten wir in unserem ersten Beispiele, wo $dz = d\varphi$ ist:

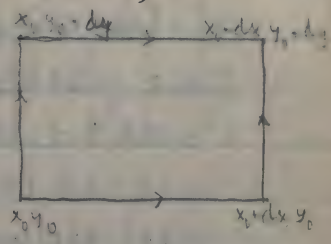
a) wenn wir an φ_1 entlang über a und dann r_2 entlang nach 2 gehen: $z - z_0 = 0 + \varphi_2 - \varphi_1$,

b) wenn wir über b in der entsprechenden Weise gehen: $z - z_0 = 0 + \varphi_2 - \varphi_1$; d. h. wir haben auf beiden Wegen thatsächlich denselben Wert erhalten. Anders ist es im zweiten Falle, wo $dz = r^2 d\varphi$ ist, da erhalten wir für Weg a) $z - z_0 = r_2^2(\varphi_2 - \varphi_1)$ und für
" b) $z - z_0 = r_1^2(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Im Anschluss an diese geometrischen Betrachtungen wollen wir dieses auch noch analytisch fassen:
Wir wollen einen Kreisprocess nach folgender Fig. beschreiben, und untersuchen wann sich für z derselbe Wert ergiebt. Gehen wir zunächst



von (x_0, y_0) aus um dx weiter nach (x_0+dx, y) so würden wir für die zugehörige z Ordinate den Zuwachs erhalten: $dz = N(x,y)\,dx$, indem ja y fortbleibt. Von (x_0+dx, y) schreiten wir jetzt weiter um dy, also nach (x_0+dx, y_0+dy) und bekommen:



$$dz = N(x+dx, y)\,dy$$

Also insgesamt:

$$dz = N(x,y)\,dx + \left(N + \frac{\partial N}{\partial x}dx\right)dy.$$

Auf den in der Fig. durch zwei Pfeile angedeutete Wege erhalten wir aber:

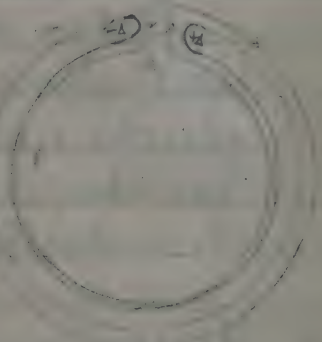
$$dz = N(x,y)\,dy + \left(N + \frac{\partial N}{\partial y}\right)dx$$

Und wenn nun diese beiden Zunahmen gleiche sind, dann haben wir es mit einem exakten Diff. zu thun. Dann muss ersichtlich die Gleichung bestehen:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Unsere neue geometrische Auffassung vom Wesen des exakten Differentials ergibt als analytische Bedingung für das exakte Diff. genau die gleiche Bedingung, mit der wir neulich begonnen haben.

Kreisprocesse, welche singuläre Punkte umspannen.
Der Satz, dass ein exaktes Differential, hin-
integriert über eine geschlossene Curve, den
Betrag 0 liefert, ist nur dann richtig, wenn
diese geschlossene Curve keinen singulären
Punkt einschliesst.
Wie ist es aber mit zwei verschiedenen
geschlossenen Curven, die um den singulären
Punkt einfach herum liegen? Diese ergeben
denselben Zuwachs. Man erkennt dies, wenn
man den einen Weg auf den anderen in
folgender Weise zurückführt:
Nennen wir die Zunahme,
welche das z bei Verlauf
des inneren Weges erleidet
P, die Zunahme bei
Verlauf des äusseren P'
und verbinden wir die
beiden Wege durch die
Strecken +Δ und -Δ, so erhält man, von A
beginnend und den Pfeilen folgend bei
Rückkehr nach A als Zuwachs von z:

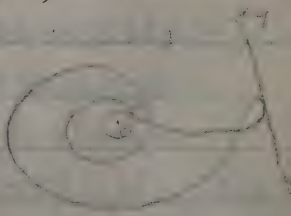


$$P + \Delta - P' - \Delta = P - P'.$$

Zusammengenommen ist dieser Weg gleich einem Wege, welcher den singulären Weg nicht einschliesst, also gleichwertig mit der punktiert gezeichneten Curve ist, und daher ist der Zuwachs von z, $P-P'=0$, mithin $P=P'$.

Wir gewinnen also den Satz: Geschlossene Integrationswege, welche den singulären Punkt in gleicher Weise (d.h. gleich oft und in gleichem Sinne) umkreisen, ergeben denselben Zuwachs von z.

Auf diese Weise können wir jetzt auch jeden beliebigen Weg zusammensetzen, aus solchen einfachen Umkreisungen und aus solchen Stücken, welche den Nullpunkt nicht umkreisen: Daher gilt allgemein der Satz: Ein beliebiger geschlossener Weg liefert als Zuwachs des z den Betrag $k \cdot P$, wo k eine positive oder negative ganze Zahl ist, die angibt, wie oft der geschlossene Weg in positivem Sinne um den Nullpunkt herumläuft.

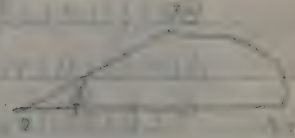


Wir sehen somit, dass jetzt das Integral $\int_{x_0 y_0}^{xy} dz$ selbst vieldeutig erscheint und zwar um einen beliebigen Betrag $k \cdot P$, weil man in den Verbindungsweg von $x_0 y_0$ bis xy irgend einen geschlossenen Weg einschalten kann, der k mal in positivem Sinne um den singulären Punkt herumläuft. Dies wollen wir so formulieren:

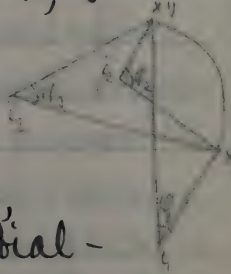
Die Integration eines exakten Differentials bietet zwar insofern nichts Neues, als sie für jeden angegebenen Integrationsweg auf ein gewöhnliches Integral zurückführt. Dagegen tritt wegen der Willkür des Integrationsweges dieses auf, dass das Integral vieldeutig werden kann, trotzdem dass das Differential eindeutig ist.

Die Grösse P nennt man den Periodizitätsmodul. Hat nun das Differential eine grössere Anzahl singulärer Punkte, so bekommen wir für das Integral eine entsprechende Anzahl von Periodizitäts-Moduln $P_1, P_2 \ldots$ und es ist dann das Integral $\int_{x_0 y_0}^{xy} dz$ indem ich den Integrationsweg verändere, um folgenden Betrag willkürlich

abzuändern, um $k_1 P_1 + k_2 P_2 + \cdots$, wo $k_1, k_2 \cdots$ beliebige positive oder negative ganze Zahlen sind.
Diese ganze Theorie von der Vieldeutigkeit der Integrale exakter Differentiale kommt in der Physik in mannigfaltigster Weise zur Anwendung. Es sei beispielsweise das elektromagnetische Potential eines elektrischen Stromes von der Intensität i, der in einem Leiter senkrecht zur Papierebene fliesst, im Punkte $x_0, y_0 = 0$, so ist es im Punkte $xy = i \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - i \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0} = i\varphi$ wo φ den Winkel zwischen Anfangs- und End-Strahl bedeutet.



Hat man mehrere solcher Stromdrähte, so erhält man als Potentialdifferenz zwischen $x_0 y_0$ und xy den Ausdruck:
$i_1 \varphi_1 + i_2 \varphi_2 + i_3 \varphi_3 + \cdots$ wo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \cdots$ die in der Fig. angedeuteten Winkel sind.



Laufen wir nun dabei einmal um $i_1, i_2 \cdots$ herum, so bekommen wir als Potential-Differenz: $P_1 + P_2 + \cdots = 2\pi i_1 + 2\pi i_2 + \cdots$

Also das electromagnetische Potential eines solchen Stromsystems ist eine vieldeutige Function des hier betrachteten Art, welche das eindeutige Differential besitzt:

$$dz = i_1 d\Phi_1 + i_2 d\Phi_2 + \cdots$$

und $2\pi i_1, 2\pi i_2, \ldots$ als Periodizitätsmoduln aufweist. Ebenso kommt unsere Theorie in der reinen Mathematik zu mannigfacher Geltung: Gehen wir kurz einmal auf die Functionen einer complexen Variablen $x+iy$ ein, sodass $f(x+iy) = u+iv$, wir bilden uns $f(u+iv)(dx+idy)$ und können dasselbe sofort in einen reellen und in einen imaginären Bestandteil spalten, nämlich in

$$\int (u\,dx - v\,dy) + i \int (v\,dx + u\,dy).$$

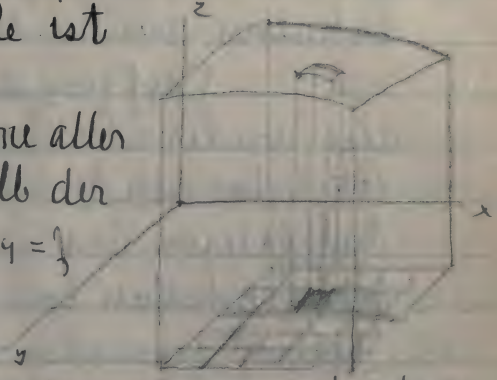
wir wollen hierauf nicht näher eingehen, sondern bemerken hinzu folgendes: In der Funkt.-theorie der complexen Grössen beschränkt man sich nun auf solche $u+iv$ für welche die beiden Differentiale $u\,dx - v\,dy$ und $v\,dx + u\,dy$ beides exakte Diff. sind. Infolgedessen führt die Integration einer complexen Function auf die Betrachtung exakter Differentiale zweier reeller veränderlichen. Daher kommt Alles, was wir über die Vieldeutigkeit der Integrale solcher exakter Diff. gesagt haben, in der Fl.-Theorie der complexen veränderlichen schon beim einfachen Integrale zur Sprache.

Mehrfache Integrale

Das Doppelintegral als Rauminhalt.

Der Inhalt einer Säule ist gleich $f(x\,y)\,dx\,dy$.
Bilden wir die Summe aller dieser Säulen innerhalb der Grenzen $x=a$ $x=b$ $y=c$ $y=\beta$ so erhalten wir

$$\int_a^a dx \int_c^b f(x\,y)\,dy$$



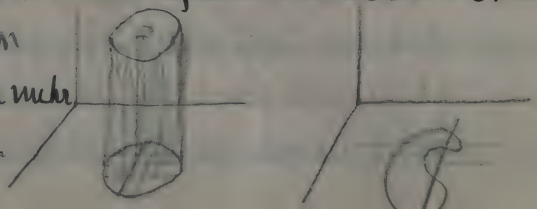
für den vorgelegten Kubikinhalt; auch erhält man für denselben

$$\int_c^b dy \int_b^a f(x\,y)\,dx.$$

Wir können daher schreiben:

$$\int_\beta^\alpha\int_c^b f(x\,y)\,dx\,dy = \int_b^a dx \int_c^b f(x\,y)\,dy = \int_c^b dy \int_b^a f(x\,y)\,dx$$

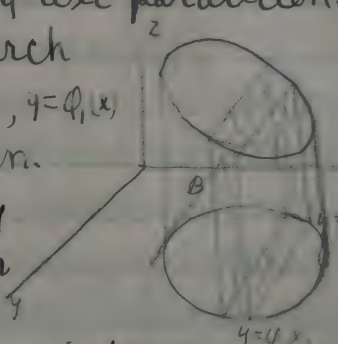
Ganz anders ist es, wenn in der xy-Ebene kein Rechteck, sondern eine krummlinige Contur gegeben ist. Wir wollen zunächst annehmen, dass die neue Contur von Parallelen zur x und y Axe nur in 2 Punkten (Fig. 1) geschnitten wird und nicht in mehr als 2, wie in (Fig. 2).



Dann wollen wir uns über dieser Contur wieder Ordinaten errichtet bis zur Fläche $z = f(x,y)$ und erhalten den hierdurch gegebenen Rauminhalt zu:

$$\int dx \int f(x,y)\,dy \quad \text{oder} \quad \int dy \int f(x,y)\,dx$$

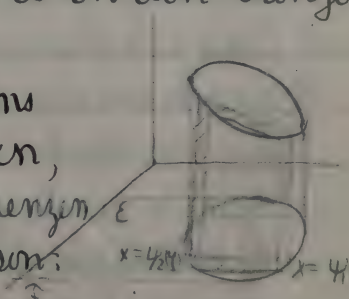
also wieder als Doppelintegral. Was aber neu ist, das sind die zu wählenden Grenzen. Integrieren wir zuerst nach y und halten x fest, so haben wir das y immer laufen zu lassen zwischen dem untersten Werte und dem obersten, der gerade dem festgehaltenen x entspricht. Wir werden daher so vorgehen: Wir wollen unsere Contur in der xy-Ebene durch die beiden zur y-Axe parallelen Tangenten B und A in die zwei durch die Funktionen $y = \varphi_2(x)$, $y = \varphi_1(x)$ gegebenen Teile zerlegen. Wenn wir nun nach y integrieren, so sehen wir y läuft von $\varphi_2(x)$ bis nach $\varphi_1(x)$ und der Rauminhalt der in der Fig. gezeichneten Scheibe ist gegeben durch das Integral $dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)\,dy$. Jetzt haben wir noch die Summe dieser Scheiben



zu bilden von $x = B$ bis $x = A$ und erhalten dann durch Grenzübergang für den vorgelegten Rauminhalt:

$$\int_B^A dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)\, dy.$$

Wir heben folgendes noch besonders hervor: Die Klammergrösse hängt in doppelter Weise von x ab, einmal dadurch, dass es als Parameter unter dem Integralzeichen steht, zweitens dadurch, dass es in den Grenzen vorkommt.



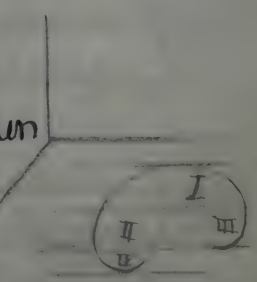
Wenn wir jetzt zweitens zuerst nach x integrieren, so werden wir unsere Grenzen ganz anders wählen müssen: Wir zerlegen jetzt unsere Contur durch die beiden zur x-Axe parallelen Tangenten E und F in die zwei Teile $x = \varphi_2(y)$ und $x = \varphi_1(y)$ und halten jetzt ein bestimmtes y fest. Für die in der Fig. gezeichnete Scheibe erhalten wir dann den Rauminhalt:

$$dy \int_{\varphi_2(y)}^{\varphi_1(y)} f(x,y)\, dx.$$

Diesen Ausdruck haben wir nun noch nach y zu integrieren innerhalb der Grenzen $y=E$ und $y=F$, so dass für den Gesamtinhalt wird:

$$\int_E^F dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y)\,dx$$

Wir wollen dies in folgenden Satz zusammenfassen: Wenn wir ein Doppelintegral dieser allgemeinen Art bilden und entweder zuerst nach y und dann nach x integrieren, oder zuerst nach x und darin nach y integrieren wollen, darin ist genau auf die Grenzen zu achten. Das ist nun in noch höherem Masse der Fall, wenn in der xy-Ebene eine Figur gegeben ist, die in mehr als zwei Punkten von Parallelen zur x und y-Axe geschnitten wird. Im Hinblick auf die Figur wollen wir zuerst einmal nach x integrieren und sehen dabei, dass wir 4 Tangenten parallel zur x-Axe ziehen können. Wir können jedoch nur zwischen 2 Grenzen integrieren. Wir haben aber auch in der x-Richtung für festes y Schwierigkeiten: Wir erhalten nämlich

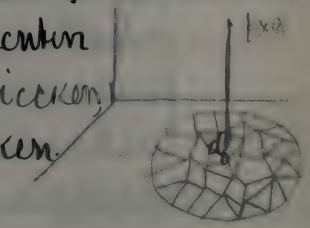


einmal einen Streifen, dann zwei und schliesslich wieder nur einen für festes y. Wir werden daher folgendermassen vorgehen: Wir wollen durch die gezeichneten Tangenten den ganzen Flächeninhalt in 4 Teile I, II, III, IV zerlegen, von denen jeder auf die soeben angegebene Art integriert werden kann.

Vertauschen wir x mit y bei dieser Operation, so kann die Anzahl der Teilbereiche eine sehr verschiedene sein. In dem dargestellten Falle würde das Gesamtbereich gar nicht zerteilt werden.

Definition des Doppelintegrals durch Grenzprocess.

Stellen wir uns jetzt auf einen allgemeineren Standpunkt, so wollen wir einmal die gegebene Fläche in der xy-Ebene mit lauter kleinen Flächen-elementen von beliebiger Gestalt, Dreiecken, Vierecken etc. bedeckt denken. Ein beliebiges sei d_0.



Errichten wir nun in irgend einem Punkte desselben eine Senkrechte von der Höhe $f(x,y)$, so haben wir als Inhalt des entstehenden kleinen Cylinders mit Annäherung $= d_0 f(x,y)$.
Jetzt bilden wir

$$\sum d_0 f(x,y)$$

und nehmen hiervon den Limes für $d_0 = 0$; und zwar sollen dabei alle Dimensionen des d_0 kleiner und kleiner werden. Diesen Limes bezeichnen wir mit:

$$\lim_{d_0=0} \sum f(x,y) d_0 = \int\int f(x,y)\, dx\, dy = \int\int_{d_0} f(x,y)\, d_0$$

und gewinnen folgenden Satz:
Wir definieren das Doppelintegral von $f(x,y)$ genommen über einen ebenen Bereich, als den Limes, dem die Summe $\Sigma f(x,y) \cdot d_0$ zustrebt, wenn man die d_0 unbegrenzt zahlreicher und kleiner werden lässt, so zwar, dass in der Grenze nicht nur der Flächeninhalt von d_0, sondern alle Dimensionen Null werden.
Während es nun zur ersten Orientierung genügen mag, die Existenz eines Limes daraus

zu entnehmen, dass es sich eben um die Berechnung eines Cubikinhaltes eines gegebenen Raumstückes handelt, so wird man von einem höheren Standpunkte aus die Existenz eines solchen Limes arithmetisch begründen und den Cubikinhalt unseres Raumstückes geradezu durch den Limes erklären. Wir wollen hierzu ein Beispiel nehmen, und zwar wollen wir den Cubikinhalt der Halbkugel bestimmen. Da hierbei $f(x\,y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ ist, so liegt uns folgendes Doppelintegral vor:

$$\iint \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

welches über die Kreisfläche zu erstrecken ist. Wir wollen zunächst längs des schraffierten Streifens parallel zur y-Axe integrieren. Dabei ist also das Wesentliche, die Grenzen richtig zu wählen. Dieselben sind für festgehaltenes x:

$y = \sqrt{a^2-x^2}$ und $y = -\sqrt{a^2-x^2}$.

Wir haben somit:

$$\iint = \int dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int dx \left[y\sqrt{a^2-x^2-y^2} + (a^2-x^2)\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}} \right]_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\therefore \iint = \frac{\pi}{2}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)\,dx = \frac{2\pi}{3}a^3$$

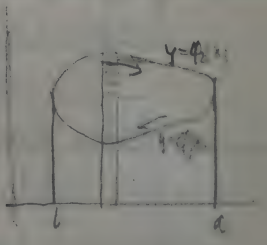
Noch einmal das exakte Differential.
Benutzen wir jetzt das Doppel integral um die Theorie des exakten Differentials zum Abschluss zu bringen. Wir fanden:
Wenn ein Ausdruck $M\,dx+N\,dy$ ein exaktes Diff. sein sollte so müsste sein:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Betrachten wir jetzt einmal den Ausdruck:

$$\iint\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx\,dy$$

wobei die Integration über eine Fläche ausgedehnt werden soll, welche durch eine geschlossene Curve begrenzt ist, die keinen Unendlichkeitspunkt einschliesst.

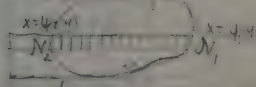


Wir wollen mit dem Doppelintegral eine Umformung vornehmen und die beiden Bestandteile desselben einzeln behandeln.
Wir haben dann

$$\iint \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy = \int_b^a dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy = \int_b^a (M_1 - M_2)\,dx$$

Dieses Integral wollen wir noch etwas umformen. Wir haben doch für alle oberen Curvenpunkte die Stückchen $N_1\,dx$ aneinanderzureihen und zwar von links nach rechts gehend. Das gleiche haben wir dann für alle unteren Punkte, von links nach rechts gehend, alle Stückchen $N_2\,dx$ zusammenzunehmen und mit negativem Vorzeichen zu versehen; d.h. aber einfach, mit positivem Vorzeichen von rechts nach links zu gehen. Dadurch verwandelt sich der erste Bestandteil unseres Doppelintegrals in das Integral $\int N\,dx$, um die Begrenzung im Sinne des Uhrzeigers einmal herumgenommen.
Jetzt kommen wir zum zweiten Bestandteile:

$$\int dy \int -\frac{\partial N}{\partial x}\,dx$$



Auf ähnliche Weise werden wir für dieses Integral bekommen:

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{\psi_2(y)}^{\psi_1(y)} \left(-\frac{\partial N}{\partial x}\,dx\right) = \int_{y_1}^{y_2} (-N_1 + N_2)\,dy$$

Dieses Integral ist gleich $\int N\,dy$ genommen entlang der Contur wieder im Sinne des Uhrzeigers. Es ist also unser gesammtes Doppelintegral

$$\iint \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx\, dy = \int (M\, dx + N\, dy)$$

das Integral rechts geführt längs der Contur im Sinne des Uhrzeigers.

Damit haben wir nun eine Fundamentalformel bewiesen, welche unsere früheren geometrischen Betrachtungen über die Differentiale bestätigt: Im Falle eines exakten Differentials also wenn $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$ ist, liefert die Integration bei einem Kreisprocess immer den Betrag Null, sofern kein singulärer Punkt eingeschlossen ist.

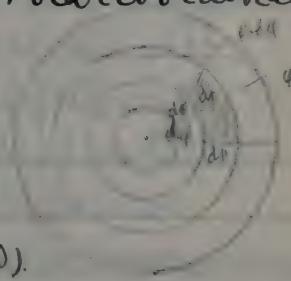
Jetzt erkennen wir aus unserer Formel, dass das Integral $\int (M\, dx + N\, dy)$ hingeleitet längs einer Contur, die keinen singulären Punkt einschliesst, thatsächlich Null ist im Falle eines exakten Differentials. Ist jedoch $M\, dx + N\, dy$ **kein** solches exaktes Diff., so wird der Betrag des an einer Contur entlang geleiteten Integrals durch das im Allgemeinen nicht verschwindende Doppelintegral $\iint \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx\, dy$ gemessen.

Rauminhalt in Polarcoordinaten.

In der allgemeinen Fassung

$$\iiint f \cdot dv = \lim \sum f \cdot \Delta v$$

ist es begründet, dass wir auch zum Polarcoordinaten System übergehen können. Wir wollen dabei beachten, dass wir auch jetzt bei der Operation mit Polarcoordinaten Exekutive anwenden.



Es ist hier $dv = r\,dr\,d\varphi$ und unser Integral wird

$$\iint F(r,\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

wo $F(r,\varphi) = f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

Beispiele:

1. Halbkugel: Hier ist $z = F(r,\varphi) = \sqrt{a^2 - r^2}$.
Wir bekommen also

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2-r^2}\, r\, dr\, d\varphi = 2\pi \int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\, dr = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

2. Es ist

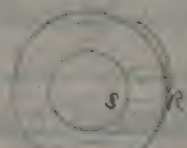
$$I^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr$$

$$= \pi \left[-e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \pi$$

$$\therefore \quad I = \sqrt{\pi}$$

Unendlichwerden der Grenzen oder des Integranden.
Unter einem Doppelintegral mit unendlichen Grenzen verstehen wir den Limes, dem ein Doppelintegral, erstreckt über endliche Grenzen, eventuell zustrebt wenn man diese Grenzen mehr und mehr hinausschiebt.
Liegt im Integrationsgebiet (z. B. im Anfangspkt.) ein Unendlichkeitspunkt, so werden wir dem Doppelintegral denjenigen Wert als Limes beilegen, den man
eventuell als Limes erhält,
wenn man den Unstetig-
keitspunkt aus dem Integrat-
ionsgebiete ausscheidet und erst nach
vollendeter Integration die Oeffnung auf
den Punkt o zusammenzieht.



Bei den Doppelintegralen mit einer
Unendlichkeitsstelle im Integrationsgebiet
gibt es eine besonders einfache Klasse, das
sind diejenigen, bei denen der Integrand
multiplizirt mit r bei r=o endlich bleibt.
Führt man Polarcoordinaten ein, so
verschwindet sofort alles Unendlichwerden

und daher die Notwendigkeit irgend welcher besonderen Definition.

Es gibt aber auch noch andere Fälle bei denen ein Limes vorhanden ist. Nehmen wir an, es sei $|f| < \frac{K}{r^n}$, wo $n < 2$ und K eine Constante. Dann können wir schreiben:

$$\left|\int_\rho^R \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi\right| < \int_\rho^R \int_0^{2\pi} \frac{K\, dr\, d\varphi}{r^{n-1}}$$

$$< \frac{K R^{2-n}}{2-n} \quad \text{für } \rho = 0.$$

Dieser letzte Ausdruck ist aber für $n < 2$ endlich.

Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

Das Doppelintegral hat auch dann immer einen endlichen Wert, wenn der absolute Betrag von $f(\ )$ in der Nähe der Unstetigkeitsstelle kleiner ist als $\frac{K}{r^n}$, unter K eine Constante und unter n eine Zahl < 2 verstanden

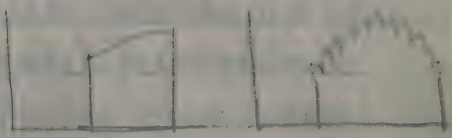
Allerlei Anwendungen der mehrfachen Integrale

1) $\int\int f(x,y)\, dx\, dy$ = Cubikinhalt

2) $\int\int f(x,y)\, dx\, dy$ = Gesamtmasse wenn $f(x,y)$ = Dichtigkeit

3) $\int\int dx\, dy$ = Flächeninhalt eines ebenen Gebietes.

Die letzte Formel ist die eigentliche Definition des Flächeninhaltes, dabei $\int f(x)\,dx$, $y = f(x)$ eindeutig sein müsste:



Der Flächeninhalt einer ebenen Figur wird in allgemeiner Weise gefasst, wenn wir sagen, er ist der Limes der Kleinen in denselben einschreibbaren Flächenstücken du unter Annahme, dass die Zahl derselben immer grösser und grösser und ihre Dimensionen immer kleiner und kleiner werden.

Dieser Definition durch das Doppelintegral sind die früheren Definitionen durch die einfachen Integrale $\int y\,dx$ und $\int\int \frac{1}{2} r^2 d\varphi$ als spezielle Fälle untergeordnet.

Analog dem früheren müssen Raumінhalte durch $\int\int\int$ definiert werden.

Bei rechtwinkligen Coordinaten kann man bei dem $\int\int\int dx\,dy\,dz$ die Integration zunächst nach z ausführen, und erhält dadurch $\int\int [z]\,dx\,dy$ wo nun $[z]$ als Function von x und y gilt, so wie es durch die

begrenzende Fläche des Rauminhaltes vorgeschrieben ist.

Verwenden wir Polarcoordinaten im Raume, so gehen wir folgendermassen vor: Wir legen zunächst durch den Anfangspunkt o eine Axe und messen von dieser Axe aus einen Neigungswinkel ϑ, den sogenannten Polarabstand. Dieser Winkel ϑ kann in irgend einer Ebene des Halbmeridians liegen, welche um den Winkel φ, die sogenannte geographische Länge, gegen die Papierebene geneigt ist, wie es durch die Aufsicht der ersten Fig. wohl deutlich wird. ϑ läuft von 0 bis π, φ von 0 bis 2π und als dritte Variable tritt noch r hinzu, die Entfernung eines Punktes von O. So haben wir die drei raumlichen Polarcoordinaten: r, ϑ, φ. Sei uns hierdurch ein beliebiger Raumpunkt gegeben und lassen wir φ sich jetzt um $d\varphi$ ändern, während r und ϑ fest

bleiben, so wird das zu $d\varphi$ gehörige Bogenelement, das auf dem Kreise mit dem Radius $r \sin\vartheta$ liegt, die Länge $r \sin\vartheta \, d\varphi$ haben.

etc etc etc

Wir bilden so ein Parallelepiped von dem Inhalte $r \sin\vartheta \, d\varphi \cdot r \, d\vartheta \cdot dr = r^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr$.
Der Rauminhalt stellt sich daher in Polarcoordinaten dar als:

$$\int\int\int r^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr$$
$$= \int\int \left[\frac{r^3}{3}\right] \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$$

Für die Kugel vom Radius a wird daher der Inhalt gleich

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr = 2\pi \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{a} = \frac{4}{3}\pi a^3$$

Ueber den Inhalt krummer Oberflächen.
Analog der Bogenlänge-Definition, construieren wir uns Dreieckpolyeder aus lauter kleinen gradlinigen Dreiecken, deren Ecken alle auf dem Polyeder liegen und bilden dann den Limes!
Alsdann ist die Frage:
Ist es wahr, dass der Oberflächeninhalt einer krummen Fläche schlechtweg definiert

werden kann als der Limes der Oberfläche eines solchen in die Fläche eingeschriebenen Polyeders? Dabei ist der Limes so zu verstehen dass alle Dimensionen kleiner und kleiner werden.

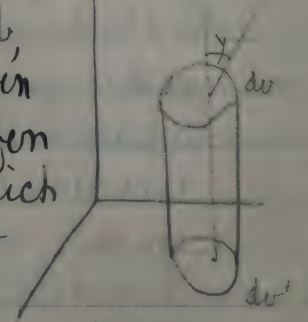
Lex der Hand der Modelle bekommen wir die Antwort: So formuliert ist die Frage zu verneinen; denn ein eingeschriebenes Polyeder hat überhaupt keinen bestimmten Grenzwert als Flächeninhalt, es sei denn, dass man festsetzt unter welchem Winkel die kleinen Dreiecke in der Grenze gestellt werden sollen.

Die exakte Definition des Oberflächeninhalts ist daher folgende:

Der Oberflächeninhalt einer krummen Fläche ist die Grenze, der die Oberfläche eines eingeschriebenen Polyeders zustrebt wenn man dafür sorgt, dass beim Kleinerwerden der Dreiecke die Dreiecksebenen immer mehr mit den Tangentialebenen der Fläche zusammenfallen.

Dass man bei der Bogenlänge schlechtweg

mit dem einfachen Grenzübergang auskommt
rührt daher, dass bei der Curve eine Sekante
von selbst in eine Tangente übergeht.
Wenn man aber bei einer Fläche durch
3 Punkte eine Ebene legt und dann diese
3 Punkte zusammenrücken lässt, dann
braucht die Ebene noch nicht eine
Tangential-ebene zu werden vielmehr
kann jede Ebene, welche die Fläche in
einer Curve schneidet, auf die genannte
Weise erreicht werden. Diese wichtigen
Bemerkungen stammen von Prof. Schwarz.
Im Anschluss an diese geometrischen
Betrachtungen wollen wir jetzt auch
analytisch die Oberfläche definieren.
Wir grenzen uns in der x y-Ebene
ein Flächenelement dv' ab,
und errichten auf demselben
einen Cylinder. Jetzt greifen
wir aus dem kleinen Bereich
dv' einen beliebigen Punkt
heraus und bezeichnen
den zugehörigen Raumpunkt mit x y z.



Unser Cylinder soll nun nach oben durch die zu diesem Punkte gehörige Tangentialebene begrenzt sein und zwar durch das Flächenelement dv. Ist γ der Winkel den die Normale zu dv mit der z-Axe bildet, so haben wir: $dv' = dv \cos\gamma$.

Die Gl. der Tangentialebene ist gegeben durch:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z-z_0) = 0$$

und wir erhalten die Cosinus der Winkel, den die Normale mit den drei Coordinatenaxen bildet aus den Gleichungen:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z} \; ; \; \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Hiernach ist

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

Das Element der krummen Oberfläche wird also:

$$dv = \frac{dv'}{\cos\gamma} = \frac{dv' \sqrt{\quad}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Also ist die Oberfläche selbst gleich

$$V = \int\int dv = \int\int dv' \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Dies ist das analytische Resultat zur Bestimmung der Oberfläche einer krummen Fläche $f(x\,y\,z)=0$.
Als Beispiel nehmen wir wieder die Oberfläche der Halbkugel. Dann ist $\cos\gamma=\frac{z}{a}$ also

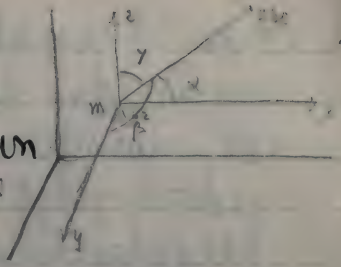
$$O=\iint\frac{a}{z}\,r\,dr\,d\varphi=\iint\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr\,d\varphi$$

Setzen wir die Grenzen ein, so bekommen wir:

$$O=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\frac{ar\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}=2\pi a^2.$$

Einleitung in die Potentialtheorie.
Die Potentialtheorie als solche ist eine eigene Disciplin, über welche besondere Vorlesungen gehalten werden. Wir wollen im Folgenden nur die erste Grundlage dazu geben, wobei Entwickelungen in Betracht kommen die unmittelbar mit unseren Integraluntersuchungen zusammenhängen.
Bei dem Newton'schen Massenanziehungsgesetz ziehen sich bekanntlich zwei Massen m und m' mit einer Kraft an, welche gleich $\frac{mm'}{r^2}$ ist.

Wir legen ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde und bezeichnen die Coordinaten von m mit x y z und die von m' mit a b c. Die Componenten der auf m wirkenden Anziehungskraft in Richtung der drei Coordinatenaxen werden dann sein, wenn $\alpha\ \beta\ \gamma$ die bezüglichen Richtungswinkel der Kraft sind:



$$X = \frac{m m'}{r^2}\cos\alpha = \frac{m m'}{r^2}\frac{a-x}{r}$$

$$Y = \frac{m m'}{r^2}\cos\beta = \frac{m m'}{r^2}\cdot\frac{b-y}{r}$$

$$Z = \frac{m m'}{r^2}\cos\gamma = \frac{m m'}{r^2}\cdot\frac{c-z}{r}$$

Die Potentialtheorie nimmt nun ihren Anfang darin, dass diese Kraftcomponenten X Y Z als partielle Differentialquotienten einer Function $V(x\,y\,z)$ erscheinen, wo

$$V(x\,y\,z) = \frac{m m'}{r} = \frac{m m'}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

ist. Denn bilden wir die partiellen Ableitungen von V, so erhalten wir:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{m m'(a-x)}{r^3} = X,\quad \frac{\partial V}{\partial y} = \cdots = Y,\quad \frac{\partial V}{\partial z} = \cdots = Z.$$

Diese Function $V(x,y,z)$, welche gewissermassen die erzeugende Function der Kräfte ist, nannte man früher die Kräftefunction, jedoch jetzt nach Gauss's Vorschlag allgemein – das Potential (der Masse m' in Bezug auf die Masse m).

Man könnte sich folgendermassen den Namen Potential" erklären: Wirken auf einen Massenpunkt die Kräfte $X\ Y\ Z$, so ist die Arbeit A, welche von diesen Kräften bei Verschiebung des Massenpunktes geleistet wird:

$$A = \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

und setzen wir für X, Y, Z die gefundenen Werte ein, so erhalten wir die Arbeit in der Form:

$$A = \int \left(\frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz\right).$$

Da der Ausdruck unter dem Integralzeichen einfach das exakte Differential von V ist, so erhalten wir, indem wir die Integration auf einem beliebigen Wege zwischen dem Anfangspunkte $x'y'z'$ und dem Endpunkte $x\,y\,z$ ausführen als Resultat

$$A = V(x\,y\,z) - V(x'\,y'\,z')$$

Lassen wir $x'y'z'$ unendlich weit hinausrücken, so wird $V(x'y'z') = \frac{mm'}{r'} = 0$ und wir behalten nur $A = V(x\,y\,z)$.

Hieraus gewinnen wir den Satz:

Das Potential $V(x\,y\,z)$ bedeutet diejenige Arbeit, welche die Anziehungskraft auf den Punkt $x\,y\,z$ (für $m=1$) beim Newton'schen Gesetz leistet, wenn der Punkt $x\,y\,z$ von unendlich kommend in die Lage $x\,y\,z$ übergeführt wird.

Das Wort Potential bedeutet eben, dass man aus der Newton'schen Anziehung möglicherweise die Arbeit V hätte gewinnen können, indem man den Punkt m aus dem Unendlichen unter dem Einfluss der anziehenden Kraft in die Lage $x\,y\,z$ übergehen lässt.

Man bekommt nun aus den zweiten Differentialquotienten eine merkwürdige Relation: Es ist:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = mm'\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(a-x)^2}{r^5}\right), \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = mm'\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(b-y)^2}{r^5}\right), \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = mm'\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(c-z)^2}{r^5}\right)$$

Addieren wir, so erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Jetzt wollen wir im Folgenden auch die Integralrechnung anwenden: wir wollen der Einfachheit halber im Punkte x y z die Masse 1 annehmen; nun aber sei jetzt ein räumlich ausgedehnte Masse und es soll nun berechnet werden, welche Anziehung dieser Massenkörper auf den Massenpunkt 1 ausübt. In einem beliebigen Punkte a b c des Körpers sei die Dichte $\rho(a\,b\,c)$, und nun zerlegen wir uns den ganzen Körper in lauter Körperelemente dk, so dass wir in einem solchen dk die Masse $\rho(abc) \cdot dk$ haben. Daher ist das Elementarpotential, welches das Massenelement auf den Punkt x y z ausübt, gleich

$$\frac{\rho(abc)\,dk}{r}.$$

und das Potential des dreifach ausgedehnten Körpers in Bezug auf den Punkt x y z ist:

$$V(x\,y\,z) = \iiint \frac{\rho(abc)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}.$$

Wir sehen: Das Potential des dreifach

ausgedehnten Körpers erscheint als ein über den Körper genommenes dreifaches Integral, in welchem die Coordinaten $x\,y\,z$ des angezogenen Punktes als Parameter auftreten.

Indem wir zunächst $x\,y\,z$ ausserhalb des anziehenden Körpers nehmen, ist der Integrand eine durchaus endliche stetige Function von x, y, z und wir dürfen $V(x\,y\,z)$ nach $x\,y\,z$ differentiieren, indem wir unter dem Integralzeichen differentiieren. Wir werden daher erhalten:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \iiint \frac{\rho(a\,b\,c)(a-x')\,da\,db\,dc}{\sqrt{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^3}}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \iiint \left[\rho(a\,b\,c)\,da\,db\,dc\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3(a-x)^2}{r^5}\right)\right].$$

Wir sehen daraus: der erste Differentialquotient $\frac{\partial V}{\partial x}$ bedeutet nach wie vor X, d. h. die Summe aller der x-Componenten, welche seitens der Elemente des Körpers auf unserm Punkt $x\,y\,z$ ausgeübt werden. Also:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}\,,\quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}\,,\quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}\,.$$

Im vorliegenden Falle ist daher $V(x\,y\,z)$

wieder die Kräftefunktion, oder das Potential, welches die räumlich ausgedehnte Masse m' auf unserm Punkt x y z ausübt. Dabei genügt V(x y z) nach wie vor der charakteristischen Diff. Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 .$$

Es bleibt nun zu untersuchen:

1) ob die auftretenden Integrale einen Sinn behalten, wenn der angezogene Punkt in das Innere von m' hineinrückt?

2a) ob die Diff. gleichungen

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

bleiben!

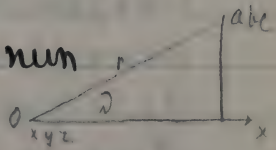
2b) ob es ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \; ?$$

Das Potential im Innern des anziehenden Körpers.

Gehen wir zur ersten Frage über, ob diese drei Integrale einen Sinn behalten, wenn der Punkt x y z im Innern des Körpers liegt. In den älteren Lehrbüchern findet man

oft eine oberflächliche Behandlung dieser und der folgenden Frage; exakt ist die Sache bei C. Jordan oder auch bei Picard behandelt worden. Wir nehmen den Punkt $x\,y\,z$ zum Anfangspunkt des Polarcoordinaten Systems und die bisherige x-Axe zur Axe des neuen Systems, sodass der Polabstand durch den Winkel ϑ gemessen wird, den die Fig. angiebt. Dann wird $\frac{a-x}{r} = \cos\vartheta$ und für den Elementarkörper $da\,db\,dc$ haben wir bei Polarcoordinaten zu setzen: $r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$.



Dadurch verwandeln sich nun unsere Integrale in:

$$V = \iiint \rho\, r \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$X = \iiint \rho \cos\vartheta \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi.$$

$$Z = \iiint \frac{\rho}{r}(-1+3\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Haben nun diese Integrale einen Sinn? Wir sehen V und X verlieren ihre Unstetigkeiten, da gerade hier der neulich erwähnte günstige Umstand auftritt. Wir können daher den Satz aussprechen.

Die Integrale V und X behalten auch im

Innern des Körpers eine völlig klare, bestimmte Bedeutung: mit dem Σ aber ist gar nichts anzufangen, da der Integrand für $r=0$ in unerlaubter Weise unendlich wird und zwar je nach dem Werte von ν positiv oder negativ. Σ müssen wir daher in der Folge ganz beiseite lassen.

Gehen wir jetzt zu 2a) d.h. Gilt die Gl. $X = \frac{\partial V}{\partial x}$, wenn $x\,y\,z$ im Innern des Körpers liegen? Wir sehen nun:

Trotzdem X und V beide im Innern des Körpers eine bestimmte Bedeutung haben, können wir nicht ohne weiteres sagen, dass im Innern des Körpers $X = \frac{\partial V}{\partial x}$ ist; denn es fehlt die Berechtigung, das V unter dem Integralzeichen nach dem Parameter x zu differentiieren, weil ein solches nur dann unbedenklich ist, wenn der Integrand eine stetige Funktion ist; hier aber wird er für $x=a\;y=b\;z=c$ unendlich. Da müssen wir also ganz prinzipiell auf die Bedeutung des Diff. Quotienten zurückgehen: vorher machen wir noch folgende

Verabredung: Wir legen irgend eine Kugel um den Punkt x y z herum, die ganz im Innern des Körpers verläuft. Dann wird sich unser Potential V spalten lassen in V' von der Kugel allein herrührend, und in V'', von der übrigen Masse herrührend. Das V'' macht dabei gar keine Schwierigkeiten und wir beschränken uns allein auf V', das Potential einer Kugel mit Radius R.

Schreiben wir uns jetzt V(x y z) einmal ausführlich hin, so haben wir:

$$V(x\,y\,z) = \iiint \frac{\rho(a\,b\,c)\,da\,db\,dc}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

genommen über die Kugel mit dem Radius R.

Lassen wir nun x wachsen um Δ, so wird:

$$V(x+\Delta x, y, z) = \iiint \frac{}{\sqrt{(x+\Delta-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

ebenfalls über die Kugel genommen.

Integrieren wir hier nun zunächst nach a, dann nach b, dann nach c, so wird aus:

$$V(x\,y\,z) = \int_{-R}^{+R} dc \int_{-\sqrt{R^2-c^2}}^{+\sqrt{R^2-c^2}} db \left[\int_{-\sqrt{R^2-b^2-c^2}}^{+\sqrt{R^2-b^2-c^2}} \frac{\rho(a\,b\,c)\,da}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} \right.$$

$V(x+\Delta x, y, z) =$

Jetzt wenden wir einen Kunstgriff an, der eben beim Potential möglich ist, indem es sich hierbei nur um die relative Lage der beiden Massen zu einander handelt. Steht nämlich x zu verändern, ändern wir a, indem wir setzen. $a - \Delta = a'$.
Dadurch erhalten wir

$$V(x+\Delta x, y, z) = \int_{-R}^{+R} dc \int \frac{\sqrt{R^2-c^2}}{\sqrt{R^2-b^2}} db \left[\int_{-\sqrt{R^2-b^2-c^2}-\Delta}^{\sqrt{R^2-b^2-c^2}-\Delta} \frac{\rho(a'+\Delta, b, c)\, da'}{\sqrt{(x-a')^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} \right]$$

Das Integral in der Klammer können wir nun so zerlegen, dass wir das mit den früheren Grenzen behaftete vornehmen also:

$$[\ ] = \Big[\underbrace{\int_{-\sqrt{R^2-b^2-c^2}}^{+\sqrt{R^2-b^2-c^2}} \frac{\rho(a'+\Delta, b, c)\, da'}{\sqrt{(x-a')^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{\sqrt{R^2-b^2-c^2}}^{+\sqrt{R^2-b^2-c^2}-\Delta} \frac{}{\sqrt{}}}_{\text{II}} - \underbrace{\int_{-\sqrt{R^2-b^2-c^2}}^{-\sqrt{R^2-b^2-c^2}-\Delta} \frac{}{\phantom{\sqrt{(x-a')^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}}}_{\text{III}} \Big]$$

Diese 3 Integrale wollen wir nun einzeln abschätzen, unter der Annahme, dass Δ eine verschwindend kleine Grösse wird. Wir werden zu dem Zwecke unser ρ in eine Taylorsche Reihe

entwickeln, indem wir annehmen, dass ρ einen bestimmten endlichen Diff.quotienten $\frac{\partial \rho}{\partial a}$ hat. Die Glieder höherer Ordnung werfen wir von vornherein weg, da sie später beim Grenzübergang doch wegfallen. Wir erhalten:

$$\rho(a'+\Delta, b, c) = \rho(a' b' c') + \Delta \frac{\partial \rho(a' b c)}{\partial a'}$$

und behandeln den Ausdruck I nach diesem Ansatz. Derselbe wird daher:

$$\int_{-\sqrt{R^2-b^2-c^2}}^{+\sqrt{R^2-b^2-c^2}} \frac{\rho(a' b c)\, da'}{r} + \Delta \int_{-\sqrt{R^2-b^2-c^2}}^{+\sqrt{R^2-b^2-c^2}} \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial a'}\, da'$$

Da wird nun das erste Integral durch weitere Integration nach b und c zu $U(x,y,z)$ und wir gewinnen somit die Gl.

$$U(x+\Delta, y, z) - U(x, y, z) = \Delta \iiint_{-\sqrt{R^2-b^2-c^2}}^{+\sqrt{R^2-b^2-c^2}} \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial a'}\, dc\, db\, da'$$

$$+ \iint \text{II} \quad - \iint \text{III}$$

Der Grundgedanke bei diesem ganzen Vorgehen ist, dass man die Aenderung des x auf die Aenderung des a wirft.

Schreiben wir auch die beiden letzten Bestandteile ausführlich hin, so liefern dieselben

$$\int dc \int db \left[\int_{\sqrt{R^2-b^2-c^2}}^{\sqrt{R^2-b^2-c^2}-\Delta} \frac{\rho(a+\Delta, b, c)}{r}\, da - \int_{-\sqrt{R^2-b^2-c^2}}^{-\sqrt{R^2-b^2-c^2}-\Delta} \frac{\rho(a+\Delta, b, c)}{r}\, da \right]$$

wo wir den Accent beim a der Kürze halber fortgelassen haben.

Beide Integrale können wir nach dem Mittelwertsatz abschätzen, und finden dadurch, dass im Intervalle Δ für immer kleiner werdende Δ das Integral $\int_{\sqrt{\ }}^{\sqrt{\ }-\Delta} \frac{\rho(a+\Delta, b, c)}{r}$ bis auf kleine Grössen höherer Ordnung gleich $-\Delta \frac{\rho(\sqrt{R^2-b^2-c^2}, b, c)}{r}$ ist.

Ganz entsprechend wird das Integral $\int^{-\sqrt{\ }-\Delta} \frac{\rho(a+\Delta, b, c)}{r}$ d
zu $-\Delta \frac{\rho(-\sqrt{\ }, b, c)}{r}$ wo natürlich auch in $\sqrt{\ }$ für a $\sqrt{R^2-b^2-c^2}$ bezw. $-\sqrt{R^2-b^2-c^2}$ einzutragen ist.

Also haben wir:

$$V(x+\Delta, y, z) - V(x, y, z) = \Delta \iiint \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{da\, db\, dc}{r}$$

$$+ \int_{-R}^{+R} dc \int_{-\sqrt{R^2-c^2}}^{\sqrt{R^2-c^2}} db \left[-\frac{\rho(\sqrt{R^2-b^2-c^2}, b, c)}{r} + \frac{\rho(-\sqrt{R^2-b^2-c^2}, b, c)}{r} \right]$$

wobei das dreifache Integral über eine Kugel vom Radius R genommen werden soll.

Wir werden zweckmässiger Weise das Oberflächenelement der Kugel einführen, also rechter Hand statt $db.dc$ --- $-d\sigma \cos\alpha$ setzen und linker Hand $ds \cos\alpha$ an Stelle von $db.dc$; unter α den Winkel verstanden, welchen die nach aussen errichtete Normale der Kugel mit der x-Axe bildet. Dadurch gestaltet sich das Doppelintegral um in $-\Delta \iint \rho \frac{\cos\alpha}{r} d\omega$, genommen über die Oberfläche der Kugel vom Radius R. Wir haben daher folgende Gleichung:

$$V(x+\Delta\ y\ z) - V(x\ y\ z) = \Delta \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial a} da\,db\,dc$$

$$- \Delta \iint \rho \frac{\cos\alpha}{r} d\sigma$$

Dividieren wir rechts und links durch Δ, so erhalten wir beim Grenzübergang:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial a} da\,db\,dc - \iint \rho \frac{\cos\alpha}{r} ds$$

Dies Resultat werden wir so aussprechen: Hiermit ist gezeigt, dass $\frac{\partial V}{\partial x}$ auch im Innern des Körpers eine wohlbestimmte Function ist.

Jetzt vergleichen wir das $\frac{\partial V}{\partial x}$ mit unserm X, welches gleich war:

$$X = \iiint \frac{(a-x)\rho \, da\,db\,dc}{r^3}$$

genommen über die Kugel vom Radius R.
Doch wollen wir vorher noch diesen Ausdruck umformen, indem wir den Integranden als Diff. quotienten nach a schreiben:

$$X = \iiint -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial a} \cdot \rho \, da\,db\,dc.$$

Daraus finden wir durch partielle Integration:

$$X = -\iint \frac{1}{r} \rho \, db\,dc + \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial a} da\,db\,dc$$

$$= \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial a} da\,db\,dc - \iint \frac{\rho \cos\alpha}{r} ds$$

Das ist aber genau der Wert, den wir eben für $\frac{\partial V}{\partial x}$ fanden.
Zusammenfassend gewinnen wir daher den Satz: Im Innern des Körpers können wir nicht ohne weiteres $\frac{\partial V}{\partial x} = X$ setzen, weil es nicht ohne weiteres angeht, dass wir unser dreifaches Integral V nach dem Parameter x unter dem Integralzeichen differentiieren.

Trotzdem zeigt sich, dass $\frac{\partial V}{\partial x}$ wirklich gleich X ist, weil wir beide $\frac{\partial V}{\partial x}$ und das X so umgestalten können, dass wir direct gleiche Werte erhalten.

Hieraus werden wir also folgende zwei Folgerungen schliessen: Wir werden sagen:

1) $$X = \iiint \frac{\partial f}{\partial a}\, da\,db\,dc - \iint f \cos\nu\, ds$$

2) Man kann nach x differentiieren indem man unter dem Integralzeichen differentiirt. Also für $U = \iiint f\, da\,db\,dc$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \iiint \frac{a-x}{r^3}\rho\, da\,db\,dc.$$

Jetzt wollen wir im Anschlusse an I $\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ bilden: Ja auf das dreifache Integral $\iiint \frac{\partial f}{\partial a}\, da\,db\,dc$ können wir direct unsere eben genannte Regel 2) in Anwendung bringen; und beim zweiten Ausdruck ist die Differentiation unter dem Integralzeichen ja ohne weiteres gestattet. Daher bekommen wir:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \iiint \frac{\partial f}{\partial a}\frac{a-x}{r^3}\, da\,db\,dc - \iint \frac{\rho(a-x)\cos\nu}{r^3}\, ds.$$

Ferner erhalten wir:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \iiint \frac{(a-x)\frac{\partial \rho}{\partial a} + (b-y)\frac{\partial \rho}{\partial b} + (c-z)\frac{\partial \rho}{\partial c}}{r^3} da\,db\,dc$$

$$- \iint \frac{\rho}{r^2}\left[(a-x)\cos\alpha + (b-y)\cos\beta + (c-z)\cos\gamma\right] ds$$

Dadurch haben wir ΔV in bestimmte Form gebracht, und nun wollen wir noch das dreifache und das zweifache Integral auswerten: Zu dem Zwecke legen wir uns jetzt den Punkt $x\,y\,z$ nach vollendeter Differentiation bequem und zwar in den Mittelpunkt der Kugel hinein, wodurch für die Oberfläche der Kugel $r = R$ wird.
Ausserdem führen wir noch Polarcoordinaten ein, wobei die Beziehungen gelten:

$$a = x + r\cos\vartheta\,,\quad b = y + r\sin\vartheta\cos\varphi\,,\quad c = z + r\sin\vartheta\sin\varphi$$

Ferner

$$\frac{\partial a}{\partial r} = \cos\vartheta = \frac{a-x}{r}\,,\quad \frac{\partial b}{\partial r} = \sin\vartheta\cos\varphi = \frac{b-y}{r}\,,\quad \frac{\partial c}{\partial r} = \sin\vartheta\sin\varphi = \frac{c-z}{r}\,.$$

Für $x = y = z = 0$ gilt also:

$$\rho(abc) = \rho(r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta\cos\varphi,\ r\sin\vartheta\sin\varphi)$$

Ferner ist:

$$\frac{(a-x)\frac{\partial \rho}{\partial a} + (b-y)\frac{\partial \rho}{\partial b} + (c-z)\frac{\partial \rho}{\partial c}}{r} = \frac{\partial \rho}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial \rho}{\partial r}\,.$$

Folglich geht unser dreifaches Integral über in

$$\iiint \frac{\partial f}{\partial r} \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

Was aber das Doppelintegral anbetrifft, so haben wir:

$$\frac{(a-x)\cos\alpha + (b-y)\cos\beta + (c-z)\cos\gamma}{r} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

Also verwandelt sich dasselbe in:

$$-\iint \rho \frac{R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}{r^2 = R^2} = -\iint \rho \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Führen wir noch beim $\iiint$ die Integration nach r aus, so gewinnen wir die einfache Gleichung:

$$\Delta U = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (\rho)_0^R \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi - \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho_{(R)} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

wobei mit R ein Punkt der Kugeloberfläche mit O ihr Mittelpunkt bezeichnet ist. Also ist:

$$\Delta U = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho_{(R)} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi - \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho_{(0)} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$
$$- \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho_{(R)} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= -\rho(x\,y\,z) \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= -4\pi \cdot \rho(x\,y\,z).$$

Wir haben daher das Resultat gewonnen:

Auch im Innern unseres Körpers hat das Potential V wohlbestimmte zweite Diff. quotienten. Und zwar ist deren Summe:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

nicht mehr 0, wie ausserhalb des Körpers, sondern hat den Wert $-4\pi\rho$, unter ρ die Dichte verstanden, welche an der Stelle $x\,y\,z$ herrscht.

— Ende —

Einleitung in die Theorie der Differentialgleichungen.

Vorlesungen von Prof. Dr Felix Klein.

Sommer-Semester 1897

Ausarbeitung von A. Hauck nach der Ausarbeitung des Assistenten Weber.

Capitel I.

Diff. Gleichungen 1ter Ordnung zwischen 2 veränderlichen.

A. Geometrische Auffassung.

1. Erste Grundlegung.

§1. Die allgemeine Bedeutung von $f(x\,y\,y')=0$.

Aus $\Omega(y'\,y\,x)=0$ folgt

$$y'=F(x,y)$$

gesucht wird

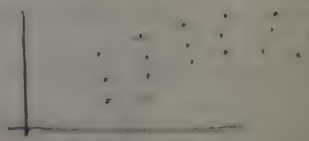
$$y=f(x)$$

Schreiben wir

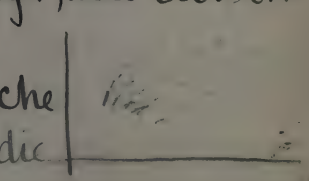
$$y'\equiv \frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X}$$

wo X und Y Functionen von x und y sind, d.h. aber nichts anderes als:

Die Diff. Gl. $\Omega(y'\,y\,x)=0$ ordnet jedem Punkte $x\,y$ eine von dem Punkte auslaufende oder durch den Punkt durchlaufende Richtung zu.



Somit ist das Integrationsproblem der $\Omega(y'\,y\,x)=0$: Es wird verlangt, alle Curven $y=f(x)$ zu finden, welche in jedem ihrer Punkte die gleiche Richtung mit der durch die



Diff. Gl. gegebenen Richtung haben.
Beispiel 1. $y' = 1$ also $y = x + \text{Const}$.
Die Integralcurven sind hier
die Schar paralleler gerader Linien,
die unter 45° gegen die Horizontale
geneigt sind.

Beispiel 2. $y' = -\frac{x}{y}$ $\quad x\,dx + y\,dy = 0$
$\therefore \quad x^2 + y^2 = c^2$

§2. Praktische Beispiele.
Eine analoge Aufgabe ist es bei einem magnetischen Felde, für welches man an jeder einzelnen Raumstelle die Richtung der magnetischen Kraft kennt, die Kraftlinien zu construieren, indem man die einzelnen durch die Kraftverteilung gegebenen Bogenelemente aneinanderreiht.
Wir sahen dass durch Auftreten einer Constanten es einfach unendlich viele Curven gibt.
Die Constante enthaltende Gl. heisst das allgemeine Integral der Diff. Gl. G setzt man einen bestimmten Wert für c heraus so heisst die Gl. ein „particulares Integral der Diff. Gl.
Es sei nun ein Curvensystem gegeben durch

$$\chi(x,y) = \text{const.}$$

Wir wollen die orthogonalen Trajectorien bestimmen.

Zunächst ist das Gesetz des Fortschreitens entlang der gegebenen Curven in irgend einem Punkte $x\,y$ gegeben durch:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \chi}{\partial y}\,dy$$

wenn $\delta x, \delta y$ die Richtung senkrecht zu dx, dy bedeutet so ist

$$\delta x\,dx + \delta y\,dy = 0$$

$$\therefore \quad \delta x : \delta y = \frac{\partial \chi}{\partial x} : \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

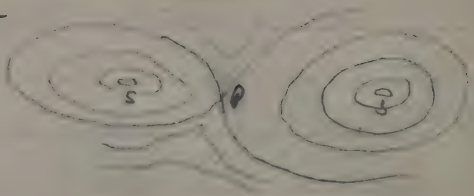
welches die Diff. Gl. der Orthogonalen Trajectorien der Curven $\chi(x,y) = C$ ist.

Sind $\chi(x,y) = C$ die Niveaulinien eines Terrains dann repräsentieren unsere orthogonale Trajectorien die Curven des stärksten Falles.

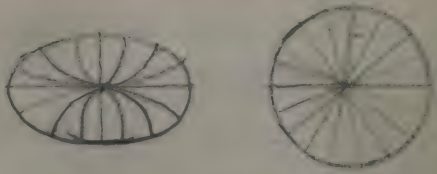
§ 3. Singularitäten bei Curven stärksten Falles.

In einem Scheitelpunkt laufen ∞ viele Integralcurven zusammen; durch einen Kreuzungspunkt (Sattelpunkt) laufen zwei

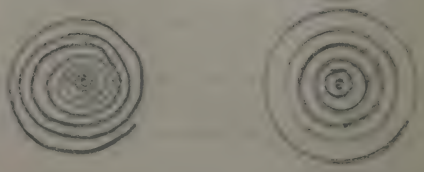
getrennte Integralcurven.
P ist ein Kreuzungs- oder Sattelpunkt.
S sind Gipfel oder Scheitelpunkte.



Einlaufen der Integralcurve bei einem Gipfel.



Weitere singuläre Stellen die bei den Diff. El'en 1ter Ordnung auftreten sind Strudelpunkte im speziellen Falle Wirbelpunkte, d.h. Punkte um welche die Integralcurven entweder als asymptotische Spiralen herumlaufen oder geradezu geschlossene Cyklen vorstellen, indem im letzten Sonderfall die Windungen der Spirale immer enger werdend, schliesslich in sich selbst zurücklaufen.



§4. Analytische Entwicklungen hierzu.
Stützen wir die geometrische Betrachtung durch einfache analytische Entwicklungen.

Wir nehmen an, das Terrain von der Gl. $z = \chi(x,y)$ sei so beschaffen, dass z in der Umgebung eines Punktes $x_0\, y_0\, z_0$ nach dem Taylor'schen Satze entwickelt werden kann. Wir haben dann:

$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y-y_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + \cdots\right.$

oder wenn wir die von Monge eingeführten Abkürzungen p, q, r, s, t benützen und ersetzen ferner $z - z_0$ ---- durch die endliche Differenzen Δz ----, alsdann lautet die Gl. der Fläche in der Umgebung von $x_0\, y_0\, z_0$

$$\Delta z = p_0 \Delta x + q_0 \Delta y + \frac{1}{2}(r_0 \Delta x^2 + 2 s_0 \Delta x \Delta y + t_0 \Delta y^2) + \cdots$$

Beschränken wir uns nur auf die Glieder 1ter Ordnung, so bekommen wir die in Δx und Δy lineare Gl.

$$\Delta z = p_0 \Delta x + q_0 \Delta y$$

und zwar ist dies die Gl. der Tangential-ebene in $x_0\, y_0\, z_0$.

Behalten wir auch noch die nicht verschwindende Glieder 2ter Ordnung bei, so erhalten wir:

$$\Delta z = p_0 \Delta x + q_0 \Delta y - \frac{1}{2}(r_0 \Delta x^2 + 2 s_0 \Delta x \Delta y + t_0 \Delta y^2)$$

Diese Gl. stellt ein (Schmiegungs)paraboloid dar.

Wir werden uns nun gestalten, unsere krumme Fläche in der Umgebung von $x_0 y_0 z_0$ in 1ter Annäherung durch die Tangentialebene, in 2ter durch ihr Schmiegungsparaboloid in $x_0 y_0 z_0$ zu ersetzen. Hierin liegt dann die Berechtigung die Horizontalcurven, welche einen Gipfel umgeben in 1ter Annäherung als Ellipsen zu bezeichnen.

Was werden nun die Gipfel und Sattel für Punkte sein? Wir finden: es sind diejenige Punkte, in denen die Tangentialebene horizontal ist, für welche also die Gl'en

$$p_0 = 0 \quad q_0 = 0$$

erfüllt sind. Zusammenfassend werden wir so sagen: Die Scheitel und Sattelpunkte sind gemeinsam dadurch definiert, dass für sie p_0 und q_0 verschwinden, also für sie die Tangentialebene horizontal ist.

Unsere Formel für das Schmiegungsparaboloid nimmt, wenn $x_0 y_0 z_0$ ein Scheitel oder Sattel ist, die Form an:

$$\Delta z = \frac{1}{2}(r_0 \Delta x^2 + 2 s_0 \Delta x \Delta y + t_0 \Delta y^2).$$

Nun wollen wir sehen, in welcher Curve die

Fläche von der horizontalen Tangentialebene in $x_0 y_0 z_0$ geschnitten wird. Indem wir $z = z_0$, also $\Delta z = 0$, setzen, erhalten wir:

$$0 = r_0 \Delta x^2 + 2 s_0 \Delta x \Delta y + t_0 \Delta y^2$$

also eine Curve zweiten Grades, welche in zwei Geraden zerfällt. Daraus folgt: Der Schnitt der horizontalen Tangentialebene mit unserer Fläche besitzt im Berührungspunkte einen Doppelpunkt, dessen Aeste gegeben sind durch die Gl.

$$r_0 \Delta x^2 + 2 s_0 \Delta x \Delta y + t_0 \Delta y^2 = 0$$

Um die Aeste zu trennen, berechnen wir $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ als eine durch eine quadratische Gl. gegebene Unbekannte. Wir bekommen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{s_0}{t_0} \pm \frac{\sqrt{s_0^2 - r_0 t_0}}{t_0}$$

Die Aeste unseres Kegelschnittes werden also:

1) imaginär für $s_0^2 - r_0 t_0 < 0$ d. h. der Doppelpunkt ist ein Einsiedler: Gipfel.
2) reell für $s_0^2 - r_0 t_0 > 0$ d. h. eigentlicher Doppelpkt. Sattel.
3) für $s_0^2 - r_0 t_0 = 0$ fallen die Aeste im Doppelpkt. zusammen. Diesen Fall der Spitze wollen wir

in unseren Betrachtungen ausschliessen.
Was hat dies nun für unsere Diff. Gl. der
Linien stärksten Falles zu bedeuten?
O ihselben in die X Y-Ebene projiciert,
hatten doch die Diff. Gl.

$$dx : dy = \frac{\partial X}{\partial x} : \frac{\partial X}{\partial y} = p : q.$$

Was nun die Singularitäten anbetrifft,
so sehen wir, diejenige Puncte unserer
Diff. Gl. sind singular, für welche $dx:dy = 0:0$ ist
Diese Angabe ist natürlich nicht hinreichend
Entwickeln wir uns daher einmal $z = X(x,y)$
nach der Taylor'schen Reihe, so haben wir
in der Nähe von $x_0 y_0 z_0$

$$z - z_0 = p_0(x-x_0) + q_0(y-y_0) + \tfrac{1}{2}\{r_0(x-x_0)^2 + \quad\}+ \cdots$$

Differenzieren wir nach x, y so haben wir

$$p = p_0 + r_0(x-x_0) + s_0(y-y_0) + \cdots$$

$$q = q_0 + s_0(x-x_0) + t_0(y-y_0) + \cdots$$

Wenn nun p_0 und q_0 zu Null werden, so
bleiben im Übrigen die Taylor'schen Reihen
ungeändert, es verschwinden eben die
Constanten. Wir haben daher folgenden Satz:
An unseren singulären Stellen verschwinden

allerdings p und q beide gleichzeitig, doch so, dass sie sich in der Nähe der singulären Stellen in zwei Taylor'sche Reihen entwickeln lassen, bei denen die linearen Glieder nicht sämtlich fehlen. (Wäre dies der Fall, so haben wir es eben mit höheren Singularitäten zu thun, die uns hier nichts angehen). An diesen Satz hat die späte analytische Behandlung anzuknüpfen.

§5. Asymptotencurven auf krummen Flächen.

Wir wählen einen Punct $x_0 y_0 z_0$ der Fläche $z = X(x y)$ und entwickeln wieder nach Taylor. Subtrahieren wir hiervon die Gl. der Tangentialebene $\Delta z = p_0 \Delta x + q_0 \Delta y$ so erhalten wir die Projection der Schnittcurve mit unserer Fläche, auf die xy-Ebene:

$$r_0 \Delta x^2 + 2 s_0 \Delta x \Delta y + t_0 \Delta y^2 + \cdots = 0$$

Wir erhalten wieder die drei Fälle.

Man sagt nun:

Wenn der Doppelpunct

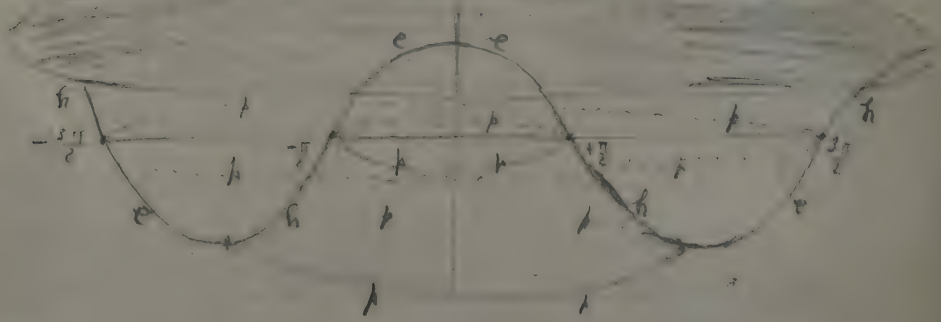
1) ein isolierter ist, die Fläche ist an dieser Stelle elliptisch gekrümmt
2) ein eigentlicher Doppelpunkt ist: hyperbolisch
3) wenn eine Spitze vorhanden ist: parabolisch.

Beispiele dafür resp.

1) Ellipsoid; 2) Hyperbolisches Paraboloid; 3) Kegel.

Im Allgemeinen wird eine Oberfläche hyperbolisch und elliptisch gekrümmte Portionen haben, welche getrennt sind durch die sogenannte parabolische Curve.

Betrachten wir folgendes Beispiel: Wir lassen die Meridiancurve $z = \cos \rho$ rotieren: mithin erhalten wir als Oberfläche $z = \cos \sqrt{x^2+y^2}$.


e
e
h
h
h
h
h
h
h
h
h
h
p
p
p

Ein Curvenbogen erzeugt bei Drehung um eine Z-axe einen elliptisch (hyperbol.) gekrümmten Flächenteil, wenn er der Axe seine concave (convexe) Seite zukehrt. Die Maxima, Minima und Wendepunkte erzeugen dabei die parabolische Trennungslinien.

Die Projektion derjenigen Curven welche die Tangentialebene des Punktes x y z aus der Fläche ausschneidet (Fig.) war uns gegeben durch die Gl.

$$0 = r\,\Delta x^2 + 2s\,\Delta x \Delta y + t\,\Delta y^2 + \cdots$$

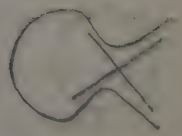
Indem wir nur die Glieder 2ter Ordnung berücksichtigen, erhalten wir hieraus diejenige Diff. Gl., welche uns das Gesetz angibt, nach dem man von einem Flächenpunkte auf einem der Aeste der Projection dieser Curve fortschreitet, nämlich:

$$0 = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2.$$

Gehen wir wieder zu unserer Rotationsfläche zurück, so werden sich unsere parabolische Curven bei Projektion auf

die x y-Ebene als Kreise um O darstellen.
Diejenigen Portionen,
welche elliptisch
(hyperbolisch) gekrümmten
Teilen entsprechen
sind horizontal
(vertical) schraffiert.
Wir lenken unsere
Aufmerksamkeit auf
die Punkte der
hyperbolischen Fläche,
weil wir nur für diese Punkte reelle
Fortschreitungsrichtungen bekommen.
Wir können so sagen: Die Integralcurve
unserer Diff. Gl. überdecken die hyperbolisch
gekrümmte Flächenteile doppelt während
sie die elliptisch gekrümmte Flächenteile
frei lassen.
Man bezeichnet diese Integralcurven als
Haupttangentencurven oder Asymptoten-
curven. Haupttangentencurven deshalb,
weil von den unendlich vielen Tangenten,
welche in einem Flächenpunkte existieren,

nur zwei die oben diskutierte Schnittcurve im Doppelpunkte berühren. Den Namen Asymptotencurven führen sie aus folgendem Grunde: Die Schnittcurve der Fläche mit einer Ebene parallel zur Tangentialebene (in nächster Nähe des Berührungspunktes) verläuft wie eine Hyperbel und unsere Hauptkrümmungen bezeichnen nur die Asymptoten-Richtungen unserer Hyperbel, wie dies herauskommt, wenn wir uns bei der Taylor'schen Reihe auf Glieder 2ter Ordnung beschränken. Denken wir uns jetzt auf unserer Fläche in jedem Punkte die beiden Fortschreitungsrichtungen eingetragen, so sehen wir, dass dieselben immer mehr zusammenfallen, wenn man auf die parabolische Curve rückt. Jedoch ist der Unterschied, dass sie in die radiale Richtung zusammenfallen, wenn man auf den einen Zweig geht, dass sie in die tangentiale Richtung fallen, wenn man auf den Kreis geht,



der unsere ringförmige Fläche nach aussen begrenzt. Zeichnen wir uns nun die Asymptotencurven selbst, so sehen wir, dass sich diese in Folgedessen mit Spitzen auf den inneren Begrenzungskreis des hyperbolischen Stückes aufsetzen und jedesmal den äusseren Begrenzungskreis berühren.

Was hat nun die parabolische Curve für eine Bedeutung? Sie tritt auf als Ort solcher Punkte, wo die beiden Fortschreitungsrichtungen zusammenfallen; derartige Curven wird es immer geben, wenn in der Diff. Gl. das $\frac{dy}{dx}$ in höherem Grade vorkommt.

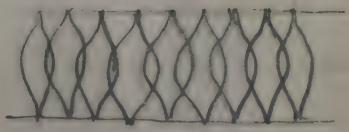
Wir resumieren folgendermassen: Die parabolische Curve unserer Fläche ist zum Teil ein Ort für Spitzen der Integralcurven unserer Diff. Gl., zum Teil ist sie selbst eine Lösung der Diff. Gl., welche als Enveloppe der allgemeinen Integralcurven erscheint und in sofern als singuläre Lösung der Diff. Gl. bezeichnet

wird. Die analoge Betrachtung findet statt, wenn in der vorgelegten Diff. Gl. das $\frac{dy}{dx}$ in höherem Grade vorkommt. Man frage dann nach dem geometrischen Orte solcher Punkte, für welche zwei der Fortschreitungsrichtungen zusammenfallen und untersuche nun die einzelnen Teile dieses Ortes, ob sie möglicherweise selbst der Diff. Gl. genügen und dann eben solche singuläre Lösung vorstellen.

§ 6. Idee der singulären Lösung.

Die singuläre Lösung ist, wenn sie vorhanden ist, Enveloppe der Integralcurven. Es ist aber gar nicht nötig, dass die einfach unendlich vielen Integralcurven überhaupt eine Enveloppe haben (wie man fälschlich bis vor Kurzem annahm). Denn der geometrische Ort für die Schnittpunkte aufeinanderfolgender Integralcurven kann sehr gut nur ein geometrischer Ort für die

singulären Stellen der Integralcurven sein, es braucht nicht von den Integralcurven berührt zu werden.



2. Weitere Ausführungen

§7. Die Existenzbeweise durch Polygonconstruction und durch Reihenentwickelung. Denken wir uns eine Diff. Gl. von der Form gegeben

$$\frac{dy}{dx} = f(x\,y) \quad ; \quad dy : dx = y : x .$$

Dann wollen wir annehmen, dass y und x nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ und $y-y_0$ entwickelt werden können: Also:

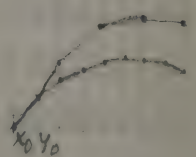
$$X = a + b(x-x_0) + c(y-y_0) + \text{----} \qquad \text{wo } a \neq 0$$
$$Y = a' + b'(x-x_0) + c'(y-y_0) + \text{----}$$

Darin ist auch $Y : X$ nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ und $y-y_0$ entwickelbar und es gehört daher zu jeder Stelle $(x\,y)$, die

innerhalb des Convergenzkreises der Reihe liegt, nur eine bestimmte Fortschreitungsrichtung $\frac{dy}{dx}$.
Wie wollen wir aber beweisen, dass es überhaupt solche Integralcurven giebt? Ferner können wir die weitere Frage stellen: Genügt hier die geometrische Darlegung, oder ist ein analytischer Beweis erforderlich?
Was unsere Frage anbetrifft, so hat Cauchy zwei analytische Beweise für die Existenz der Integralcurven gegeben, wenn die Diff. Gl. vorgegeben ist.
Es werden hier nur die Gedanken entwickelt, das übrige ist nachzulesen bei Picard, Traité d'analyse II, Cap. II (1ter Beweis pg. 291–298, 2ter Beweis pg 304–308).
Was die Prinzipien der beiden Beweise angeht, möchte ich den 1ten Cauchy'schen Beweis den Polygonbeweis nennen. Ähnlich wie bei der Entwicklung der Idee des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x = dx} \sum_a^b f(x)\,\Delta x$$

verfährt Cauchy in seinem ersten Beweise:
Denken wir uns den Punkt $x_0 y_0$ auf eine Strecke aufgetragen und diese in lauter endliche Stücke Δx eingeteilt, in deren Endpunkten Ordinaten errichtet sind. Wir schreiten nun von $x_0 y_0$ in der durch die Diff. Gl. diesem Punkte zugeordneten Richtung geradlinig vorwärts bis zur ersten Ordinate, dann zur zweiten etc. wir bekommen so ein Polygon. Lassen wir nun die Stückchen Δ kleiner werden und führen eine analoge Construction aus, so werden wir wieder ein Polygon erhalten u.s.w.

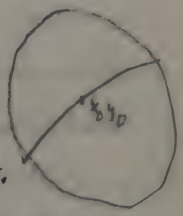


Wir erhalten als Resultat: Das Polygon strebt einer Grenzcurve zu, welche wirklich der vorgelegten Diff. Gl. $y' = f(x,y)$ genügt.
Es folge der zweite Beweis:
Es sei gegeben $y' = f(x,y)$.
Während nun beim ersten Cauchy'schen Beweis nur die Stetigkeit von $f(x,y)$

voraus gesetzt wird, setzen wir jetzt voraus, daß $f(x\,y)$ in der Nähe von $x_0 y_0$ in eine Potenzreihe entwickelbar sei:

$$y' = f(x\,y) = a + b(x-x_0) + c(y-y_0) + \dots$$

Nun betrachten wir die Integralcurve, die durch den Punkt $x_0 y_0$ geht und versuchen auch diese in eine Potenzreihe zu entwickeln. Man berechnet sich zu dem Zwecke die folgenden Diff. Quot.



$$y' = f(x\,y)$$
$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$
$$y''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y''$$
$$- - - - - -$$

wo man nun noch y'' durch y' ersetzen kann und dieses selbst durch $f(x\,y)$ ersetzen wird.

Tragen wir jetzt überall den beliebig gegebenen Wert $x_0 y_0$ ein, so bekommen wir die Diff. Quotienten $y_0' \; y_0'' \; y_0''' \dots$ an der Stelle $(x_0 y_0)$.

Jetzt setzen wir uns formal folgende Taylorsche Reihe zusammen:

$y = y_0 + y_0'(x-x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{y_0'''}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots$
und fragen uns ob diese Reihe convergiert, und wenn sie convergiert, dann stellt sie unsere Integralcurve durch den Punkt $(x_0 y_0)$ dar. Das Wesentliche ist also der Convergenzbeweis.

§8. Theorie der einfachsten singulären Stellen.
Um die singulären Punkte zu untersuchen, denken wir uns die Diff. Gl. in folgender Gestalt geschrieben:
$dx : dy = X : Y = a + b(x-x_0) + c(y-y_0) + \cdots : a' + b'(x-x_0) + c'(y-y_0) + \cdots$
Wir werden nun eine singuläre Stelle bekommen, wenn a und a' beide $= 0$ sind, da dann $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$ wird in $x_0 y_0$. Dies war auch oben, bei den Curven stärksten Falles der Fall gewesen.
Wir können auch noch den Character der singulären Stelle abstufen. Wenn nur die constante Glieder fehlen, so haben wir eine Singularität 1ter Stufe; u.s.w.
Wenn die Glieder $n$ter Ordnung verschwinden, haben wir eine Singularität

nth ter Ordnung

Für unsere Betrachtung nehmen wir an, dass in keiner der beiden Reihenentwicklungen die linearen Glieder sämtlich verschwinden. Unter diesen Voraussetzungen soll untersucht werden, wie man die von $x_0 y_0$ auslaufende Integralcurven analytisch darstellen kann. Das kommt wieder hinaus auf die Construction einer unendlichen Reihe. Hier siehe Picard III Cap. 2 pg 23-43. Der Erleichterung wegen machen wir folgende Annahme: die Reihe höre hinter den Gliedern 1,0 auf:

$$dx : dy = b(x-x_0) + c(y-y_0) : b'(x-x_0) + c'(y-y_0).$$

Diese Diff. Gl. wollen wir wirklich integrieren und untersuchen, was sich dabei für $x_0 y_0$ ergiebt:

Unsere einfache Diff. Gl. wird uns nun bereits die bekannten drei Typen der singulären Stellen darbieten:

Um dies zu beweisen, legen wir zunächst den Anfangspunkt des Coordinatensystems

in den Punkt $x=0, y=0$, so dass wir haben:

1) $dx : dy = bx+cy : b'x+c'y$

Die Frage lautet jetzt: wie verlaufen die Integralcurven in der Umgebung des Coordinatenanfangspunktes? Dann ändern wir noch die Schreibweise:

2) $\frac{dx}{dt} = bx+cy \quad , \quad \frac{dy}{dt} = b'x+c'y$

Dadurch bekommt die Sache einen Anstrich nach Seite der Mechanik hinüber wo ja t die Zeit und $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ die Componenten der Geschwindigkeit in Richtung der Coordinatenaxen sind. In der Mechanik hatten wir dann die Fragestellung: wie wird sich ein Punkt bewegen, wenn diese einfachen Diff. Gl-en für seine Bewegung gegeben sind?

Den Gegensatz der beiden Gleichungen 1) und 2) können wir so formulieren:

2) fragen nach der Bewegung im Laufe der Zeit

1) nur nach der Bahncurve.

In der That sind in der Mechanik diese Diff. Gleichungen äusserst häufig und

zwar hat man im Allgemeinen n Gleichungen und auf der rechten Seite n lineare Glieder. Man spricht in diesem Falle von einem System gewöhnlicher linearer Diff. Gleichungen 1ter Ordnung mit constanten Coefficienten. Gehen wir zur Integration über, und bilden wir uns zunächst eine Combination von der Form $x+my$, über deren Bedeutung wir bald klar werden. Es ist dann:

$$\frac{d(x+my)}{dt} = (b+mb')x + (c+mc')y .$$

Wir wollen nun m so bestimmen, dass dieser Ausdruck ein Multiplum von $(x+my)$ ist. Es soll also die Gl. bestehen:

$$(b+mb') + (c+mc')\,y = \lambda(x+my)$$

$$\therefore \quad b+mb' = \lambda$$

$$c+mc' = \lambda m$$

$$(b-\lambda) + b'm = 0$$

$$c + (c'-\lambda)m = 0$$

Wenn diese beiden linearen Gleichungen von m verträglich sein sollen, so muss die Determinante der Coefficienten $= 0$ sein:

$$\begin{vmatrix} b-\lambda & b' \\ c & c'-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Das giebt die quadratische Gl.

$$(b-\lambda)(c'-\lambda) - b'c = 0$$

welche wir die characteristische Gl. nennen. Jetzt bestimme man ihre Wurzeln berechne dann für jedes einzelne λ das zugehörige m und bilde dann die Combination $(x+my)$. Ausführlich lautet die characteristische Gl.

$$\lambda^2 - (b+c')\lambda + bc' - b'c = 0$$

Deren Wurzeln sind:

$$\lambda = \frac{b+c' \pm \sqrt{4b'c + (b-c')^2}}{2}$$

Diese Wurzeln λ_1 und λ_2 können nun reell, imaginär oder identisch sein. Wir machen für die nächste Untersuchung die Annahme, dass λ_1 und λ_2 verschieden sind.

Die λ_1 und λ_2 zugehörigen Werte von m sind aus den obigen Gleichungen:

$$m_1 = -\frac{b-\lambda_1}{b'} = -\frac{c}{c'-\lambda_1}$$

$$m_2 = -\frac{b-\lambda_2}{b'} = -\frac{c}{c'-\lambda_2}$$

Wir haben also die beiden Diff. Gleichungen:

$$\frac{d(x+m_1y)}{dt} = \lambda_1(x+m_1y) \quad , \quad \frac{d(x+m_2y)}{dt} = \lambda_2(x+m_2y)$$

$$\therefore \quad \log(x+m_1y) = \lambda_1 t + \log u_1 \qquad \log(x+m_2y) = \lambda_2 t + \log u_2 .$$

§ 9. Specielle Discussion der W-Curven.

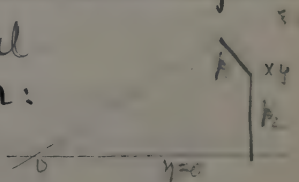
Die folgende Integralcurven sind unter dem Namen W-Curven von Klein-Lie Math. Annalen 4, pg. 50 untersucht.

Wir setzen:

$$x + m_1 y = \xi \qquad x + m_2 y = \eta$$

und bedeuten ξ und η in einem allgemeinen schiefwinkligen Coordinatensystem?

Wir fällen die Perpendikel p_1 und p_2 und haben dann:



$$p_1 = \frac{x+m_1y}{\sqrt{1+m_1^2}} \quad , \quad p_2 = \frac{x+m_2y}{\sqrt{1+m_2^2}}$$

$$\xi = \sqrt{1+m_1^2}\cdot p_1 \quad ; \quad \eta = \sqrt{1+m_2^2}\cdot p_2$$

Es sind also ξ und η die mit gewissen Constanten multiplizierten Abstände von den Linien $\xi=0$, $\eta=0$. Solche Coordinaten nennen wir allgemeine schiefe Coordinaten in der Ebene.

Wir können ξ und η natürlich auch

in einem neuen Curvensystem deuten. Es besteht dann nach den Grundsätzen der Projektionslehre folgender Satz: Die allgemeinen schiefen Coordinaten erscheinen als Parallelprojection der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten. Wenn wir also eine Gl. zwischen ξ und η haben, so können wir uns immer die Zeichnung in rechtwinkligen Coordinaten herstellen und erhalten dann die zu dem schiefwinkligen Coordinatensystem gehörige Figur als projiziertes Bild.

Wir können daraufhin schreiben:

$$\log \xi = \lambda_1 t + \log u_1, \quad \log \eta = \lambda_2 t + \log u_2$$

$$\xi = u_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \eta = u_2 e^{\lambda_2 t}$$

So sind ξ und η durch t ausgedrückt und wenn wir dieses eliminieren, so wird

$$\left(\frac{\xi}{u_1}\right)^{\lambda_2} = \left(\frac{\eta}{u_2}\right)^{\lambda_1}$$

oder

$$\eta = K \cdot \xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Machen wir uns jetzt den Verlauf dieser Curve klar. Wir sehen zunächst, dass wir im Falle, dass λ_1 und λ_2 commensurabel

sind, durch geeignete Potenzierung ganzzahlige Potenzen erhalten. Daher bekommen wir den Satz: Unsere Integralcurven sind algebraische Curven, wenn λ_1 und λ_2 commensurable Grössen sind, sonst sind sie transcendente Curven. Wir werden nun die Curven im rechtwinkligen Coordinatensystem construieren. Im Interesse voller Allgemeinheit haben wir dann die Figur noch einer beliebigen schiefen Projektion zu unterwerfen.

Unsere Gl. lautet:

$$\eta = k \cdot \xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Wir betrachten zunächst den Fall wo

I λ_1 und λ_2 reell sind: d.h. m_1 und m_2 auch reell. Wir setzen direkt $x+m_1y=\xi$, $x+m_2y=\eta$.

1) λ_1 und λ_2 haben dasselbe Vorzeichen, dann ist $\eta=0$ für $\xi=0$. Wir bilden uns nun:

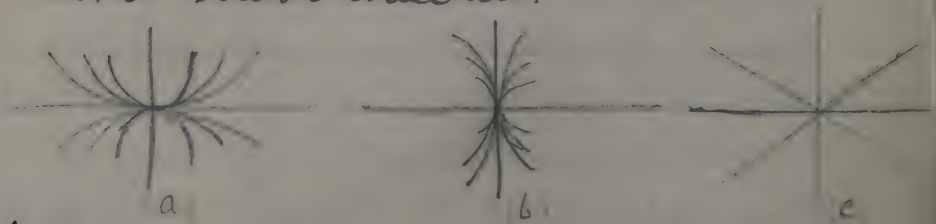
$$\eta' = k\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1}$$

und unterscheiden

a) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1>0$, dann ist $\eta'=0$ für $\xi=0$. Wir haben lauter Curven, die die horizontale Axe berühren.

b) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 < 0$. Dann ist $\eta' = \infty$ für $\xi = 0$; d.h. die Curven berühren die vertikale Axe.

c) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = 0$. Dann haben wir den Zwischenfall eines Geradenbüschels.

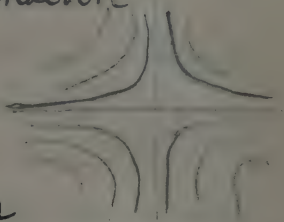


Wir erhalten also für 1) einen Scheitel.

2) λ_1 und λ_2 haben verschiedene Vorzeichen

$$\eta = K \xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Dann ist $\eta = \pm\infty$ für $\xi = 0$ je nach dem Vorzeichen von K. Wir erhalten nebenstehende Curve. Wir haben hier einen Sattelpunkt. Durch schiefe Projection bleiben natürlich Scheitel und Sattel erhalten.



II. λ_1 und λ_2 seien imaginär. Als Wurzeln einer quadratischen Gl. sind sie conjugiert imaginär:

$$\lambda_1 = \lambda' + i\lambda'' \qquad m_1 = m' + i m''$$
$$\lambda_2 = \lambda' - i\lambda'' \qquad m_2 = m' - i m''$$

Wir werden hier setzen

$$x + m_1 y = \xi + i\eta \quad , \quad x + m_2 y = \xi - i\eta$$

Dabei mögen ξ und η als rechtwinklige Coordinaten interpretiert werden, immer vorbehalten, die Figur schief hinterher zu projizieren. Wir haben dann,

1) $\log(\xi + i\eta) = (\lambda' + i\lambda'')t + \log(u' + iu'')$

2) $\log(\xi - i\eta) = (\lambda' - i\lambda'')t + \log(u' - iu'')$

Wir benutzen jetzt ein Polarcoordinaten-System:

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \qquad r\cos\varphi = \xi \qquad r\sin\varphi = \eta$$

$$\therefore \quad \xi + i\eta = r\,e^{i\varphi}$$

Analog für u' und u''

$$u' + iu'' = \rho\, e^{i\psi}$$

Tragen wir dies etwa in die erste Gl. ein, so wird

$$\log(r\,e^{i\varphi}) = (\lambda' + i\lambda'')t + \log(\rho \cdot e^{i\psi})$$

$\therefore$

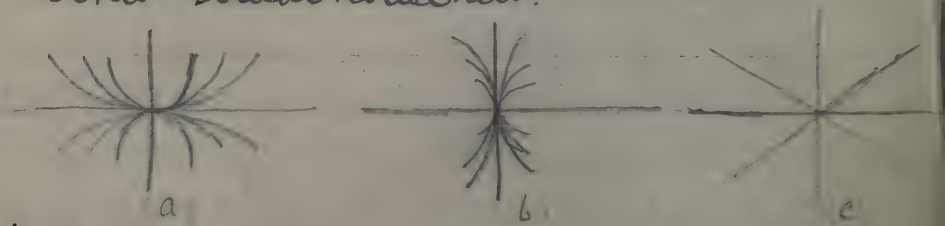
$$\log r = \lambda' t + \log\rho \qquad \varphi = \lambda'' t + \psi$$

$$\frac{r}{\rho} = e^{\lambda' t} = e^{\frac{\lambda'}{\lambda''}(\varphi - \psi)}$$

Das sind aber logarithmische Spiralen.

b) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 < 0$. Dann ist $\eta' = \infty$ für $\xi = 0$; d.h. die Curven berühren die vertikale Axe.

c) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = 0$. Dann haben wir den Zwischenfall eines Geradenbüschels.

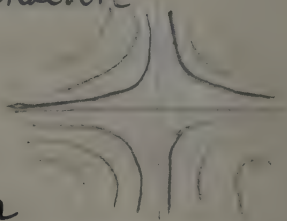


Wir erhalten also für 1) einen Scheitel.

2) λ_1 und λ_2 haben verschiedene Vorzeichen

$$\eta = K \xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Dann ist $\eta = \pm\infty$ für $\xi = 0$ je nach dem Vorzeichen von K. Wir erhalten nebenstehende Curve. Wir haben hier einen Sattelpunkt. Durch schiefe Projection bleiben natürlich Scheitel und Sattel erhalten.



II. λ_1 und λ_2 seien imaginär. Als Wurzeln einer quadratischen Gl. sind sie conjugiert imaginär:

$$\lambda_1 = \lambda' + i\lambda'' \qquad m_1 = m' + i m''$$
$$\lambda_2 = \lambda' - i\lambda'' \qquad m_2 = m' - i m''$$

Wir werden hier setzen

$$x + m_1 y = \xi + i\eta \quad , \quad x + m_2 y = \xi - i\eta$$

Dabei mögen ξ und η als rechtwinklige Coordinaten interpretiert werden, immer vorbehalten, die Figur schief hinterher zu projizieren. Wir haben dann,

1) $\log(\xi + i\eta) = (\lambda' + i\lambda'')t + \log(u' + iu'')$

2) $\log(\xi - i\eta) = (\lambda' - i\lambda'')t + \log(u' - iu'')$

Wir benutzen jetzt ein Polarcoordinaten-System:

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \qquad r\cos\varphi = \xi \qquad r\sin\varphi = \eta$$

$$\therefore \quad \xi + i\eta = r\, e^{i\varphi}$$

Analog für u' und u''

$$u' + iu'' = \rho\, e^{i\psi}$$

Tragen wir dies etwa in die erste Gl. ein so wird

$$\log(r\, e^{i\varphi}) = (\lambda' + i\lambda'')t + \log(\rho \cdot e^{i\psi})$$

$\therefore$

$$\log r = \lambda' t + \log\rho \qquad \varphi = \lambda'' t + \psi$$

$$\frac{r}{\rho} = e^{\lambda' t} = e^{\frac{\lambda'}{\lambda''}(\varphi - \psi)}$$

Das sind aber logarithmische Spiralen.

Zeichnen wir uns eine, so bekommen wir die anderen alle, indem wir entweder die erste drehen um O, oder r proportional vergrössern:

Im Falle II erhalten wir also Strudelpunkte.

Warum stellten sich nun bei den Curven stärksten Falles in unserem topographischen Beispiele nur Scheitel und Sattelpunkte ein? Um dies zu untersuchen, betrachten wir für unser Beispiel noch einmal die Taylor'sche Reihe, welche für $p_0 = q_0 = 0$ lautete:

$$z = z_0 + \tfrac{1}{2}(r_0 x^2 + 2 s_0 x y + t_0 y^2) + \text{- - -}$$

Nun heisst die Diff. Gl. der Curven stärksten Falles: $dx : dy = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y}$.

Hierfür die Werte aus der Taylor'schen Reihe eingesetzt:

$$dx : dy = (r_0 x + s_0 y + \text{- -}) : (s_0 x + t_0 y + \text{- - -})$$

Bei der allgemeinen Theorie hatten wir

aber die Gl. $dx : dy = bx + cy : b'x + c'y$.
Wir sehen, da liegt für unser früheres Beispiel eine Particularisirung vor, indem dort das ε_0 zweimal als Coefficient auftritt. Die characteristische Gl. heisst daher

$$\begin{vmatrix} r_0 - \lambda & \varepsilon_0 \\ \varepsilon_0 & t_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

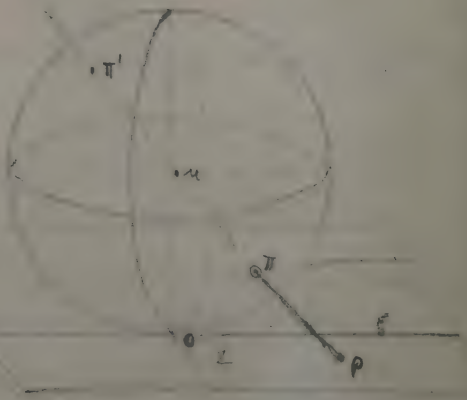
$$\therefore \quad \lambda = \frac{r_0 + t_0 \pm \sqrt{4\varepsilon_0^2 + (r_0 - t_0)^2}}{2}$$

Das Resultat ist also dieses:
Der Unterschied der Curven stärksten Falles von der allgemeinen Diff. Gl., die wir betrachteten, beruht darin dass in den R eines $b' = c$ ist. Infolgedessen hat die characteristische Gl. für λ nothwendig reelle Wurzeln; die Strudelpunkte fallen fort und es bleiben allein Gipfel- und Sattelpunkte über. Wenn wir uns dann bei dem topographischen Beispiele hinterher doch Strudelpunkte construiren können so gilt dann eben hierfür die Taylor'sche Reihe nicht mehr.

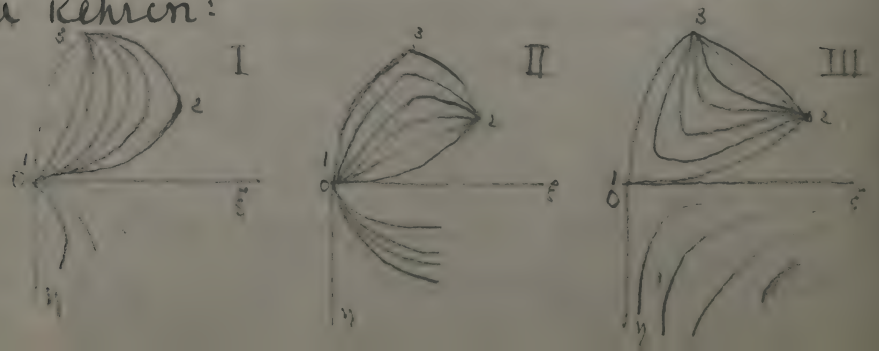
Wir bemerken noch zum Vorigen: Sind λ_1 und λ_2 rein imaginär, so gehen Spirale in Kreis, Strudelpunkt in Wirbelpunkt (Centrum? nach Poincaré) über.

§10. Uebersetzung der W-Curven auf die Kugel. Grenzcyclen.

Wir projizieren jetzt unsere Curven nach der Figur auf eine Kugel: Dabei entspricht der Aequator dem ∞-fernen.



Aus den drei Typen wird folgends, wenn wir den betreffenden Octanten jedesmal dem Gesichtsfeld zu kehren:



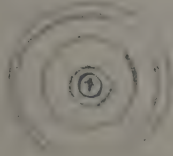
Es erscheinen jetzt die drei Fälle nicht mehr verschieden. Wir werden sagen:

I Die drei Fälle, welche wir bei reellen λ_1, λ_2 nach dem Character der Punkte unterscheiden, geben auf die Kugel übertragen, Curvensysteme ganz ähnlicher Art, welche zwei Ecken des einzelnen Oktanten zu Scheiteln haben und einen Eckpunkt zum Sattelpunkt.

Auf der Kugel liegen vier paarweis-diametrale Scheitel und zwei zueinander diametrale Sattelpunkte. Die Integralcurven laufen einfach von einem Scheitel jedesmal zu einem benachbarten, nur um 90° abstehenden Scheitel hin, indem sie eventuell im Sattelpunkte unter 90° umbiegen.

II. Wenn man den Fall, wo λ_1, λ_2 complex sind auf die Kugel überträgt, so erhält man auf der Halbkugel ein Spiralensystem, welches einerseits den Nordpol (Südpol) andererseits den Aequator

asymptotisch approximiert, sodass der Aequator ein sogenannter Grenzcyclus ist. In dem besonderen Falle, wo λ_1, λ_2 rein imaginär sind, verwandeln sich alle Integralcurven in Parallelkreise der Kugel.



§ 11. Allgemeines über den Verlauf der Integralcurven (Poincaré).

Poincaré: Sur les courbes définies par les equations differentielles (in 4 Abteilungen) Liouville's Journal sér 3; t. 7, 8 Jahrgang 1881–82

" " " 4; t. 1, 2 " 1885–86.

Das Poincaré'sche Problem ist folgendes: Gegeben ist $dx : dy = X : Y$, wo X und Y Polynome von x und y sind. Die Frage ist: Kann man über den Verlauf der Curven etwas qualitatives ermitteln?

An der Spitze der Arbeit steht die Kugelprojection.

1. Die erste Frage ist dann: wo liegen die singulären Stellen?
Antwort: da wo $X=0$ und $Y=0$ werden.
2. ist die Hauptfrage nach den geschlossenen Integralcurven, den Cyclen.
Im Allgemeinen gibt es nur einzelne solcher Cyclen als Grenzcyclen für den anderen Integralcurven. Dann gibt Poincaré auch eine Methode an, um alle Grenzcyclen im gegebenen Falle zu finden.
3. Zuletzt zeigt Poincaré, dass wir jetzt im Allgemeinen den Verlauf der Integralcurven skizzieren können, – d.h. qualitativ; die genaue quantitative Berechnung ist eine Frage für sich.
Uebrigens sind die Poincaré-schen Arbeiten zumeist dadurch besonders ausgezeichnet, dass er immer zur ersten Fragestellung zurückkehrt.
So hat man sich gewiss früher zuerst gefragt, wie ist der Verlauf solcher Curven, und dann erst hat die Analysis

Methoden gefunden um die Integration der Diff. Gl. auszuführen.
Unsere Lehrbücher geben aber heutzutage meist nur den analytischen Apparat, ohne auf die ursprüngliche Fragestellung zurückzukommen.
Demgegenüber hat Poincaré? Zuerst den Verlauf der Curven festgestellt und hierauf aufbauend die analytische Entwicklung gegeben.

§12 Differential-Gleichungen höheren Grades in y'. Die Discriminantencurven.
Wenn wir sagen, die Gl. $\Omega(x\,y\,y')=0$ soll vom n^{ten} Grade sein in y', so heisst dies, dass für einen Punkt $x\,y$ n Fortschreitungsrichtungen gegeben sind. Diese können als Wurzeln einer algebraischen Gleichung natürlich teils reell, teils complex sein.
Die xy-Ebene wird sich nun in Gebiete zerlegen, derart, dass z.B. in einem Gebiete k reelle Wurzeln existieren,

während es im Nachbargebiete z.B.
$k \pm 2$ reelle Wurzeln gibt. Der Unterschied
muss immer gradzahlig sein, da
bei algebraischen Gleichungen complexe
Wurzeln nur paarweise auftreten können.
Wie geht es nun zu, dass aus k reellen
Wurzeln $k \pm 2$ werden? Nun wissen wir,
im Fall der algebraischen Gl., dass im
Uebergangsfalle zwei Wurzeln zusammen-
fallen. Zusammenfassend werden wir sagen:
Die x,y-Ebene zerfällt in verschiedene
Gebiete, je nach der Anzahl der reellen
Wurzeln, welche die Gl. $\Omega(x\,y\,y') = 0$
bei festgehaltenem x,y für y' ergiebt.
Die Trennungslinien zwischen
diesen Gebieten bilden die sogenannten
Discriminantencurven, d.h. eben
die Curven derjenigen Punkte, für
welche zwei der Fortschreitungsrich-
tungen zusammenfallen. Diese Curve
ist also dasjenige, was im speziellen
die parabolische Curve ist.
Wie werden wir nun die Discriminanten-

curven finden? Wie drücken wir aus, dass $\Omega = 0$ aufgefasst als eine Gl. für y' eine doppelte Wurzel hat? Wir wissen, dass dann neben $\Omega = 0$ noch die Gl. $\frac{\partial \Omega}{\partial y'} = 0$ stattfinden muss. Wir werden also so sagen: Man erhält die Gl. der Discriminantencurve $D(x,y) = 0$, indem man y' aus den beiden Gleichungen $\Omega(x,y,y') = 0$, $\frac{\partial}{\partial y'}\Omega(x,y,y') = 0$ eliminiert. Daraus aber kann man nach den Grundsätzen der Algebra (für einfache Vorkommnisse) y' rational aus den beiden Gleichungen berechnen, so dass wir bekommen ($D(x,y) = 0$ vorausgesetzt):

$$y' = r(x,y)$$

Wir sehen hieraus, dass zu jedem Punkte der Discriminantencurve ein bestimmter Doppelwert von y' gehört.

Rechnen wir dies einmal an unserem Beispiele nach, so haben wir:

$$\Omega = ty'^2 + 2sy' + r = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial y'} = ty' + s = 0$$

Also

$$y' = -\frac{s}{t}$$

D ies in $\Omega = 0$ eingesetzt ergiebt die Gl. der Discriminante zu

$$rt - s^2 = 0$$

d.h. in diesem einfachen Beispiele ist unsre parabolische Curve zugleich die gesammte Discriminantencurve.

Wir verlassen nun im allgemeinen Falle die Integralcurven in der Umgebung einer bestimmten Stelle $(x\,y)$. Da ist zunächst die Frage, ob ein y' der Discriminantencurve angehört oder nicht. Das soll heissen, dass xy der Discriminantencurve angehört und y' die durch $y' = r(x\,y)$ gegebene zugehörige Richtung ist!
Natürlich, wenn ein Punkt $(x\,y)$ nicht auf der Discriminantencurve liegt, dann gehört das y' auch derselben nicht an. Jedoch auch dann, wenn xy auf der Discriminantencurve liegt, aber sein y' die durch $r(x\,y)$ gegebene Richtung nicht hat, sind wir fern von

der Discriminantencurve.
Wir wollen daher so sagen:
Nehmen wir ein Ausgangselement
$x_0\, y_0\, y_0'$; so ist unsere erste Entscheidung,
ob dasselbe fern von der Discriminantencurve liegt oder derselben angehört.
Sobald es fern liegt, können wir y'
als einfache Wurzel von $\Omega(x\, y\, y') = 0$
nach der Taylor'schen Reihe entwickeln,
haben also:

$$y' - y_0' = b(x - x_0) + c(y - y_0) + \cdots$$

Infolgedessen erstreckt sich von der
Fortschreitungsrichtung y' aus eine
ganz bestimmte Integralcurve, deren
Existenz nach Cauchy feststeht. Ein
solches Element $x_0\, y_0\, y_0'$, welches also nicht
der Discriminantencurve angehört,
ist genau so der Anfangspunkt
einer bestimmten Integralcurve wie früher.
Und nun setzen wir einmal den Fall
dass in einem Gebiete, welches von einem
Teile der Discriminantencurve
umschlossen sein soll, von jedem einzelnen

Punkte k reelle Fortschreitungs-
richtungen fortlaufen, so wird ein
solches Gebiet von den Integralcurven
k fach überdeckt. Ist dann das Nachbar-
gebiet nur (k-2) fach überdeckt, so ist
die Frage, wie ziehen sich diese beiden
verlorengehenden Schaaren von Integral-
curven an die Discriminantencurve
heran? Vielleicht also wie in unserem
speziellen Falle die Asymptotencurven
an die parabolische Curve?
Wir behaupten in der That:
Die zwei Curvenschaaren, welche in
unserem Beispiele nur auf der einen
Seite des Astes der Discriminanten-
curve existieren, ziehen sich an die
Discriminantencurve entweder mit
Spitzen heran, oder berühren dieselbe

Im letzteren Falle der Enveloppe spricht man von einer singulären Lösung unserer Diff. Gl.

§13. Die bezügliche Integralcurven als projicierte Raumcurven.

Wann wird nun das eine und wann das andere stattfinden?
Wir konnten doch für die Discriminantencurve das zugehörige y' als rationale Function von x und y berechnen: $y' = r(xy)$.
Andererseits ist jedem Punkte xy die Richtung der Tangente zugeordnet, welche die Discriminantencurve an der Stelle xy hat, nämlich:

$$y' = -\frac{\frac{\partial D}{\partial x}}{\frac{\partial D}{\partial y}}.$$

Dem entspricht nun die Regel:
Wenn $r(xy) \gtrless -\frac{\frac{\partial D}{\partial x}}{\frac{\partial D}{\partial y}}$ ist, dann ist die Discriminantencurve ein Ort der Spitzen.
Wenn $r(xy) = -\frac{\frac{\partial D}{\partial x}}{\frac{\partial D}{\partial y}}$ ist, dann ist die Discriminantencurve eine Enveloppe und dann ist dieser Ast der Discr.curve eine singuläre Lösung.

Statt eines analytischen Beweises (Picard, Traité d'Analyse III Cap. 10) wollen wir vielmehr uns eine geometrische Auffassung verschaffen. (Poincaré).
Man schreibe einmal $\Omega(x\,y\,z) = 0$ statt $\Omega(x\,y\,y') = 0$, wodurch uns eine Fläche im Raume gegeben ist; und dann benutze man noch die Gl. $\frac{dy}{dx} = y' = z$.
Die Deutung ist nun folgende:
Man soll auf dieser Fläche so weiter gehen, dass immer $dy = z\,dx$ ist.
Dies ist jetzt eine völlig eindeutige Diff. Gl. Indem wir nun eine Projection auf die xy Ebene vornehmen, erhalten wir $\Omega(x\,y\,y') = 0$.
Mithin ergiebt sich folgendes:
Man betrachte im Raume die Fläche

$$\Omega(x\,y\,z) = 0$$

und auf ihr das Curvensystem, welches durch die Diff. Gl.

$$dy = z\,dx$$

festgelegt wird und von welchem sie einfach überdeckt ist, weil durch jeden

Flächenpunkt eine wohlbestimmte Fortschreitungsrichtung durchgeht. Alsdann sind die Integralcurven in der Ebene gar nichts anderes als eine verticale Projection dieses unsre Fläche einfach überdeckenden Curvensystems und die Diskriminantencurve in der Ebene ist nichts anderes als die Umrisscurve, welche bei dieser Projection entsteht.

Für das Beispiel der Asymptotencurve hatten wir:

$$t y'^2 + 2s y' + r = 0.$$

Statt dessen schreiben wir:

$$t z^2 + 2s z + r = 0.$$

Ja, da sind also für die mit z bezeichneten Gebiete z Werte von z reell, sodass jetzt der einzelne ringförmige Teil der Ebene als Doppelprojection einer in sich zurücklaufenden Ringfläche des Raumes erscheint. Unsere Asymptotencurven

sind dabei die Projectionen von Raumcurven, welche sich schraubenartig um diese Ringfläche winden. Wir haben dies bei der einen Asymptotencurve in der Figur angedeutet, indem wir ihre Teile abwechselnd ausgezogen bez. punctiert haben.

Wie kommt es nun, dass die innere Umrisscurve ein Ort der Spitzen, die aussere eine Enveloppe ist? Es kommt daher, dass, wenn das Auge an einer Stelle in Richtung der Tangente an die Raumcurve blickt, sich dann die Raumcurve als Spitze projicirt.

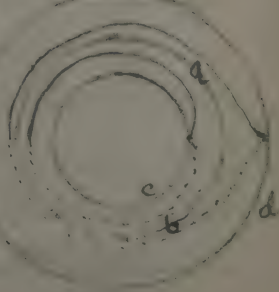
Wir fassen das Resultat zusammen: Dass die Integralcurve der xy-Ebene sich an einige Teile der Umrisscurve unserer Fläche $\Omega(x\,y\,z) = 0$ mit Spitzen heranzieht und einige Teile umhüllt, ist nur eine Folge der Projection und hängt davon ab, ob die Tangente der Raumcurve an der betreffenden Stelle zufälligerweise vertikal steht,

was die Spitze liefert oder nicht vertikal steht was die Umhüllungscurve liefert. Indem Poincaré so die ganze Diff. Gl. auf die Hülfsfläche $\Omega(x\,y\,z)=0$ verlegt, wird unsere Aufgabe in 2 Teile gespalten:
1) Auf der Hülfsfläche ein dieselbe einfach überdeckendes System von Integralcurven zu construieren, und
2) zuzusehen, was bei dieser Vertikal-projektion auf die Horizontalebene besonderes hinzukommen mag.
Was diese Sache weiter angeht, so wird auf 2 Arbeiten von Dyck in den Münchener Berichten 1891-92 verwiesen

§ 14. Curven stärksten Falles auf den Röhrenschraubenflächen als Beispiel. Statt jetzt diese Betrachtungen allgemein weiter zu führen wollen wir noch nachtheranziehen das Beispiel der Röhrenschraubenfläche, die entsteht, wenn sich eine Kugel auf einer Schraubenlinie bewegt. Durch einen vertikalaxen-

schnitt entsteht ein Oval
mit den 4 ausgezeichneten
Punkten: a, b, c, d.
Auf der Fläche sind die
a- und b-Curven, Curven
stärksten Falles.

Eine Curve stärksten Falles, welche
in unmittelbarer Nähe der Schrauben-
linie a beginnt, wird nach rechts oder
nach links über die Fläche hin sich
von a entfernen, die d oder c in vertikaler
Richtung kreuzen, und sich dann je
länger jemehr an die Schraubenlinie
b anschliessen.
Projicieren wir die Röhrenschrauben-
fläche sammt Curven stärksten Falles
so bekommen wir Folgendes: Abgesehen
von den Kreisen a und b
welche ausgezeichnete Integral-
curven sind, verlaufen die
Curven stärksten Falles
in der Figur so, dass sie
sich sowohl an a wie an b



asymptotisch anschliessen (a und b sind Grenzcyclen) und an c und d mit einer Spitze heranreichen.

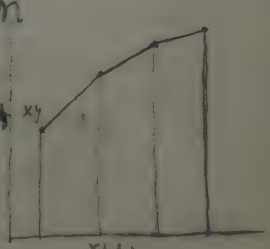
3. Numerische Berechnung, bez. mechanische Construction.

§ 15. Uebertragung der sogenannten „mechanischen Quadratur".

Wir fragen: Wie wird man, wenn man den Gesamtverlauf der Integralcurve kennt, das einzelne Curvenstück numerisch berechnen?

Analog wie bei der Trapezformel in der Integralrechnung verfahren wir folgendermassen:

1) Wir haben in der xy-Ebene einen bestimmten Punkt xy, dem durch die Diff. Gl. eine Richtung $y' = f(xy)$ zugeordnet ist. In dieser Richtung y' geht man nun bis zur Ordinate $(x+\Delta x)$, so dass man als Schnittpunkt den Punkt $(x+\Delta x,\ y+f(xy)\Delta x)$ erhält. Schreitet man in

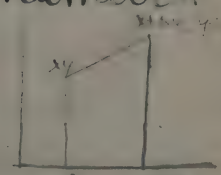


entsprechender Weise weiter, so bekommt man nach und nach ein geradliniges Polygon, welches für immer kleiner werdende Δx in der Grenze in die Integralcurve übergeht. Diese einfache Methode ist natürlich zur numerischen Berechnung gar nicht zu empfehlen, aber sie führt doch dazu, die Integralcurve durch einen Grenzprocess zu definieren und also die Existenz derselben festzustellen. (vergl. den ersten Existenzbeweis von Cauchy)

2) Ganz entsprechend kann man auch die Fortschreitungsrichtung benutzen, welche die Diff. Gl. dem rechten Eckpunkte des Stückchens zuordnet, nämlich

$f(x+\Delta x, y+\Delta x \cdot f(x,y))$

Man kommt dann zu dem Punkte:



$$x+\Delta x,\ y+\Delta x f(x+\Delta x,\ y+\Delta x f(x,y)).$$

3) Eine verfeinerte Methode besteht darin, dass man diejenige Fortschreitungsrichtung von $x\,y$ aus benutzt, welche dem Mittelpunkte des Sehnenstückchens zugehört

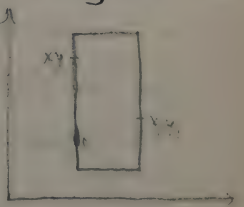
Dann hätte der Endpunct die Coordinaten:

$$y + \Delta x\, f\left(x + \tfrac{1}{2}\Delta x,\ y + \tfrac{1}{2}\Delta x\, f(x,y)\right).$$

4) Eine andere Methode nimmt diejenige Fortschreitungsrichtung, welche dem arithmetischen Mittel der den beiden Endpuncten zugehörigen Fortschreitungsrichtungen entspricht.
Also geht man von $x\ y$ nach $x+\Delta x,\ y+\Delta x\frac{f(x,y)+f(x+\Delta x,\ y+\Delta x f)}{2}$
Dies sind die drei ersten Methoden von Runge (Math. Annalen Bd. 46, 1895)
Doch bleibt er bei diesen nicht stehen, sondern vervollkommnet sie noch weiter. z. B. führt er auch ganz analog die Methode der Simpson'schen Regel für die Berechnung der Diff. Gl. durch. Siehe des weiteren seine Arbeit.

§16. Integrationsapparate.
Wie man solche Apparate construieren kann, hat vor allen Lord Kelvin am Ende seines Treatise on Natural Philosophy zur Sprache gebracht. Dann möchte ich selbst auf Grund einer persönlichen Besprechung

mit H. Wrici folgendes bemerken:
Die Idee zu dem vorliegenden Probleme ist sehr einfach, jedoch ist eine zweckmässige constructive Durchführung derselben bis Lara noch nicht vorhanden.
Die Idee ist folgende: Wir stellen uns einen Integraphen so auf die Zeichenebene, dass seine Längsrichtung in die Richtung der y axe fällt.
Der Integraph hat bekanntlich 2 Stifte $x\,y$ und $x_1\,y_1$.



Die Bewegung des Apparates erfolgt nun so, dass $y_1 = \frac{dy}{dx}$ ist.
In der Integralrechnung schreiben wir dieselbe Gl. $y = \int y_1\,dx_1$, indem wir den Apparat als Integrationsapparat ansahen, der uns zu einer gegebenen Diff. Curve $F(x,y_1)$ die Integralcurve $y = \int y_1\,dx_1$ aufzeichnete.
Es sei noch bemerkt, dass der Apparat so construiert war, dass $x_1 = x + 1$ war.
Jetzt sei uns statt einer Gl. für $x_1\,y_1$ irgend eine Diff. Gl. $\Omega(x\,y\,y') = 0$ gegeben,

so heisst das für den Integraph, dass die beiden Stifte durch einen neuen Mechanismus mit einander verbunden sein sollen. Führt man einen solchen wirklich aus, vermöge dessen also neben die ohnehin bestehende Gl. $x_1 = x+1$ noch die neue Gl. $\Omega(x\, y\, y') = 0$ tritt, so wird der Punct $x\,y$ bei Bewegung des Apparates von selbst eine Integralcurve der Diff. Gl. beschreiben. Denn vermöge der Einrichtung des Apparates ist ja von Haus aus: $y_1 = \frac{dy}{dx}$.
Führen wir einen solchen Mechanismus an einem Beispiele wirklich einmal durch. Wir ordnen uns zwei Rollen am Rahmen des Integraphen an und legen um dieselben einen Metalldraht von constanter Länge, dessen Endpuncte an den beiden Stiften befestigt sind. Alsdann besteht die Gl.:

$$y + y' = \text{Const.} = C_1$$

Mithin haben wir

$$y + \frac{dy}{dx} = C_1.$$

$$\frac{dy}{c_1 - y} = dx$$

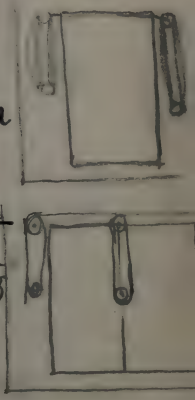
$$\therefore \quad y = -e^x + c_1 + C$$

wo c_1 die gegebene Länge des Drahtes und C eine willkürliche Constante bedeutet. Diese Integralcurve werde also durch unseren Apparat sofort aufgezeichnet. Jetzt ist es nun sehr leicht zu der allgemeinen Diff. Gl.

$$c\,y + c_1\,y_1 = \text{Const.}$$

aufzusteigen, unter c und c_1 ganze Zahlen verstanden.

Man kann für diese Diff. Gl. nämlich sehr einfach einen Mechanismus mit Hülfe des Flaschenzuges construieren wie die nebenstehende Fig. zeigt. Gehen wir noch einen Schritt weiter und setzen nach rechts an unseren Integraphen einen neuen Rahmen an, der selbst einen dritten ebenfalls verschiebbaren Stift $x_2\,y_2$ und eine Rolle trägt, wie die Fig. zeigt. Wir wollen nun den Draht über alle drei



Rollen ausspannen, sodass wir der Gl. genügen können:

$$c y + c_1 y_1 + c_2 y_2 = \text{Const.}$$

wo $c\ c_1\ c_2$ gegebene ganze Zahlen sind. $y_1 = \frac{dy}{dx}$ sein soll. $x_2\ y_2$ jedoch soll sich über eine gegebene Curve bewegen, deren Gl.

$$y_2 = \psi(x_2)$$

sein mag und zwar sei z. B. $x_2 = x + 2$. Dann nimmt unsere Diff. Gl. die Form an:

$$c y + c_1 \frac{dy}{dx} + c_2 \psi(x+2) = C$$

oder auch kürzer geschrieben:

$$c y + c_1 \frac{dy}{dx} = \varphi(x).$$

Also auch eine Diff. Gl. von dieser Form, wie sie häufig in den Anwendungen vorkommt, könnte man mit Hülfe unseres Apparates integrieren. So steht uns auch nichts im Wege, dass man die ganze Ueberlegung auf Diff. Gleichungen höherer Ordnung überträgt, indem man mehrere Integraphen hinter einander setzt der Art,

dass die Bahncurve des einen Stiftes immer die Integrationscurve zu der vom vorhergehenden Stifte beschriebenen Curve ist.

Es wäre in der That sehr erfreulich, wenn es gelänge unter Benutzung dieser Angaben, solche Apparate wirklich durchzuführen.

B. Die analytische Theorie.

§17. Die funktionstheoretische Grundauffassung.

Verschaffen wir uns vorerst eine kleine Uebersicht über die Funktionen, mit denen man sich in der Analysis zu beschäftigen pflegt. Die einfachsten sind:

1) Die rationalen Funktionen.
2) " algebraischen "
3) Für transcendente Funktionen bieten uns nun eine erste Quelle
   a) die unbestimmten Integrale, indem dieselben Funktionen ihrer oberen Grenze sind. Wir kommen da zuerst auf den Logarithmus durch das Integral

$$\int^x \frac{d\xi}{\xi} = \log x + C = y.$$

Die Umkehrfkt. e^y ist damit auch gegeben. Dann finden wir in der Integralrechnung noch andere neue Funktionen, welche nämlich durch

   b) die bestimmten Integrale eingeführt werden. Nehmen wir z.B. das bestimmte Integral

$$I = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)}},$$

so ist es immer abhängig von dem Parameter k unter dem Integralzeichen, so dass wir es gleich $I = \phi(k)$ setzen können. Diese Integrale definierten uns in der Integralrechnung thatsächlich neue Functionen, die wir nur in ganz speziellen Fällen auf andere Functionen zurückführen konnten.

Gehen wir nun zu den Diff. Gl'en über, so haben wir $\Omega(x\ y\ y') = 0$, welches uns eine Reihe von Functionen darstellt, die sich nur durch eine willkürliche Constante unterscheiden. Die Frage wird sein, können wir hier y auf die vorgenannten Fkten. zurückführen? Im allgemeinen nicht. Wir legen fest:

Wenn eine Diff. Gl. $\Omega(x\ y\ y') = 0$ vorgelegt ist, mit Coefficienten, die in den 4 vorangehenden Categorien enthalten sind, so ist die Frage, ob das durch die Diff. Gl. vorgelegte y

in den 4 vorangehenden Functions-
categorien enthalten ist oder nicht.
Im letzteren Falle entsteht die Aufgabe,
die Eigenschaften der neuen Functions-
art direct zu untersuchen, insbesondere
ihren Verlauf, ihre singuläre Punkte
u.s.w. festzustellen.
Gewöhnlich verwendet man in den
Lehrbüchern alle Sorgfalt ausschliess-
lich auf die Frage, ob sich das y
lediglich durch die Functionen der
vorangehenden Classen ausdrücken
lässt
Dann sagt man, man kann die
Diff. Gl. integriren. Die interessanten
Fälle aber, wo das y sich nicht durch
die 4 vorangehenden Functions-
arten ausdrücken lässt, von denen
sagt man, man kann sie nicht integriren.
und lässt es dabei bewenden, während
gerade da das Gebiet anfängt, an
dem die Mathematiker der Gegenwart
arbeiten.

1. Traditionelle Methoden.

§ 18. Zweierlei Hülfsmittel: Substitution, Multiplicatortheorie.

Die vorhinige? Fragestellung liegt implicite der traditionellen Theorie der Diff. Gl^en zu Grunde, nur dass bei letzterer mehr Gewicht darauf gelegt wird, vorgelegte Diff. Gl^en auf niedere Funktionen zu reduziren statt sie als Definition neuer Funktionsclassen gelten zu lassen.

Wir wollen nun zwei Gesichtspunkte nennen, nach denen man Diff. Gl^en vereinfachen kann. Das ist

1. Die Vereinfachung durch Substitution neuer veränderlichen.
2. Euler's Multiplicator.

1) Hierzu wollen wir folgendes sagen. Was die Vereinfachung durch Substitution angeht, so haben wir dieselbe bereits in dem Beispiele

$$dx : dy = bx + cy : b'x + c'y$$

angewandt. Wir hatten dort die Substitution gemacht:

$$\xi = x - m_1 y \qquad \eta = x - m_2 y$$

wo m_1 und m_2 so bestimmt wurden dass wir hatten

$$d\xi : d\eta = \lambda_1 \xi : \lambda_2 \eta$$

$$\therefore \quad \frac{d\xi}{\lambda_1 \xi} = \frac{d\eta}{\lambda_2 \eta}$$

$$\log \frac{\xi}{\lambda_1} = \log \frac{\eta}{\lambda_2} + C.$$

Was ist nun der Sinn dieses Verfahrens? Wenn wir von den Einzelheiten absehen: Durch diese Substitution ist es uns gelungen, die Variablen zu separieren, d.h. zu erreichen, dass auf der einen Seite nur die eine Variable steht. Alsdann konnten wir durch bloße Quadratur die Lösung geben. Das Hauptziel bei dieser Substitution neuer Variable war also die Separation der Variablen. Können wir eben erreichen, dass durch Substitution eine Diff. Gl. von der Form entsteht:

$$d\xi : d\eta = \varphi(\xi) : \psi(\eta)$$

so lassen sich die Variable sofort separieren und die Lösung ist gegeben durch die Gl.:

$$\int \frac{dx}{\varphi(x)} = \int \frac{dy}{\psi(y)} + C.$$

Wir fügen hinzu:
Aber auch, wenn man die Separation der Variable nicht erreicht, wird immer die Frage bleiben, welches die einfachste Form ist, die man einer Diff. Gl. durch Substitution neuer Variablen erteilen kann?

2) Bei Euler's Multiplicatortheorie gehen wir zurück auf die Betrachtungen über das exakte Differential in der Integralrechnung. Wir betrachteten damals den Ausdruck

$$M\,dx + N\,dy.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dass dieser Ausdruck das Differential einer Funktion $F(x,y)$ sei, war

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

und als Function $F(x,y)$ ermittelten wir

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\, d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x,\eta)\, d\eta - \iint_{x_0 y_0}^{x y} \left(\frac{\partial M(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial N(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right) d\xi\, d\eta$$

wozu noch eine Constante tritt entsprechend dem Umstande, dass wir bei dem Integralzeichen die unteren Grenzen weglassen.

Was hat dies nun für eine Beziehung zu unserer Diff. Gl.? Ja, wenn uns eben eine Diff. Gl. von der Form

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

vorgelegt ist, deren linke Seite das exacte Differential einer Function $F(x,y)$, also $= d\,F(x,y)$ ist, so können wir uns das zugehörige $F(x,y)$ berechnen, und zwar gelingt dies durch eine Anzahl von Quadraturen, wie die obige Formel für $F(x,y)$ zeigt. Infolgedessen haben wir dann die Integralcurve in der Gestalt $F(x,y) = \text{Const}$

Man könnte die Sache auch so einkleiden, dass man eine Fläche $z = F(x,y)$ betrachtet, und $z = \text{Const.}$ setzt. Dann erscheinen die Integralcurven als

„Niveaucurven" der Fläche $z = f(x,y)$.
„Was nun Euler gemacht hat, ist dieses: Wenn uns ein gewöhnlicher Diff. Ausdruck von zwei veränderlichen gegeben ist, so soll versucht werden denselben in die Form eines exakten Diffs. zu bringen. Es sei also z.B. vorgelegt

$$dy : dx = y : X$$

$$\therefore \quad y\,dx - X\,dy = 0$$

Wenn der Ausdruck links nun ein exaktes Diff. ist, dann muss sein

$$\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

Dann giebt uns der obige Ausdruck für $f(x,y)$ die Lösung. Im allgemeinen wird dies aber nicht der Fall sein. Da versucht nun Euler, ob er sich nicht durch einen passend gewählten Multiplikator u ein exaktes Diff. schaffen kann. Er schreibt also:

$$u(y\,dx - X\,dy) = 0$$

und fragt nun, wie muss ich das u bestimmen, damit in dieser Gl. der

Ausdruck auf der linken Seite ein exaktes Diff. vorstellt!
Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, wie wir wissen, ist:

$$\frac{\partial(uX)}{\partial x} + \frac{\partial(uY)}{\partial y} = 0$$

Daraus ist u zu bestimmen.
Diese Diff. Gl. können wir ausführlicher schreiben:

$$X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y} + u\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = 0$$

Wir erhalten also für das u selbst wieder eine Diff. Gl. und zwar eine partielle. Soweit bedeutet daher der ganze Ansatz noch keinen Fortschritt, da wir die vorgelegte Diff. Gl. mit 2 Variablen durch eine partielle Diff. Gl. mit 3 Variablen ersetzt haben und dann in Aussicht nehmen, wenn wir einen Wert von u aus dieser Gl. bestimmt haben, dann erst noch das exakte Diff. Gl.

$$uY\,dx - uX\,dy = d\Phi = 0$$

durch eine Reihe von Quadraturen zu integrieren

Die Erfahrung zeigt indess, dass man wirklich in zahlreichen Fällen, wo eine directe Behandlung der vorgelegten Diff. Gl. nicht gelingen will durch Bestimmung eines u zum Ziele kommt. z. B. vorgelegt sei

$$y\,dx - x\,dy = 0$$

Da ist die linke Seite kein exactes Diff.; denn $\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial x} = 2 \neq 0$. Wir nehmen daher

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = -2u.$$

Da ist nun in der That sehr einfach eine Lösung zu finden. Wir nehmen an, u sei nur von x abhängig, dann fällt das zweite Glied links weg und wir haben sofort eine Gl., in der die Variable sich separiren lassen.

$$\frac{du}{2u} = -\frac{dx}{x}$$

$$u = \frac{K}{x^2}$$

Es ist dann (K sei $= 1$)

$$u(y\,dx - x\,dy) = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} = d\left(-\frac{y}{x}\right)$$

Es ergibt sich also

$$-\frac{y}{x} = \text{const.}$$

als System der Integralcurven unserer Diff.-Gl.

Diese beiden angedeuteten Ideen müssen wir nun weiter verfolgen und zwar kommen wir dabei in das Gebiet hinein, auf dem Lie so ausserordentlich viele Anregungen geschaffen hat. Zur Einführung in den bezüglichen Gedankenkreis, sei empfohlen: Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen 1896

von diesem Werk bedürfen wir hier nur die etwa ersten 30 Seiten. Das andere würde uns zu weit führen.

§ 19. Einführung neuer Veränderlicher durch beliebige Punkttransformation.

Wir verfolgen jetzt die Transformation der Diff. Gl. durch Einführung neuer Variable. Und zwar setzen wir zunächst:

$$x_1 = \varphi(x\,y) \qquad y_1 = \psi(x\,y)$$

Dabei soll es möglich sein, diese Gleichungen nach x und y aufzulösen, so dass wir erhalten:

$$x = \varphi_1(x_1, y_1) \qquad y = \psi_1(x_1, y_1)$$

Bilden wir uns einmal den Diff. Quotient y_1', so haben wir:

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy} = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}y'}{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y'}$$

Die Werte von x y y' sind in die vorgelegte Diff. Gl. einzutragen.

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, wie wir solche Formeln geometrisch auffassen können. Da legt nun die analytische Geometrie denselben zweierlei Bedeutung bei:

a) sie bedeuten eine Einführung neuer Coordinaten,

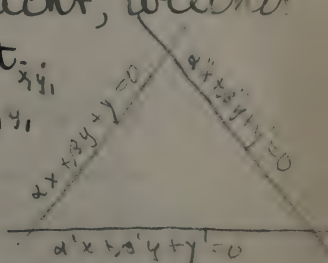
b) eine Punkttransformation bei Festhaltung des Coordinatensystems. Für unsere Diff. Gl. hat nur diese zweite Auslegung folgende Bedeutung: Wir ordnen doch zu jedem Punkte $x\,y$ vermöge $\Omega(x\,y\,y') = 0$ eine Fortschreitungsrichtung zu. Diese schliessen wir dann zu Integralcurven zusammen. Durch die neue transformierte Diff. Gl. $\Omega_1(x_1, y_1, y_1') = 0$ erhalten wir zu jedem transformierten Punkte x_1, y_1 eine neue Fortschreitungsrichtung y_1'. Wir können nun sofort den Satz aussprechen:

Bei einer solchen Punkttransformation möge eine erste Diff. Gl. in eine zweite übergehen; dann wird sich auch die Integralcurve der ersten Diff. Gl. in die Integralcurve der zweiten Diff. Gl. verwandeln.

§ 20. Speziell durch Collineation. Die allgemeine Jakobi'sche Gleichung. Welches ist nun die einfachste Art solcher Transformationen? Das ist die lineare Transformation, die in der projectiven Geometrie die Grundlage bildet. Man setzt hierbei die Coordinaten x_1, y_1 je gleich dem Quotienten zweier linearer Ausdrücke mit gemeinschaftlichen Nennern, also:

$$1) \qquad x_1 = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\alpha'' x + \beta'' y + \gamma''}, \qquad y_1 = \frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma'}{\alpha'' x + \beta'' y + \gamma''}$$

Fassen wir diese Substitutionen als Coordinaten-Transformationen auf, so kommen dabei die 3 Seiten eines Dreiecks in Betracht, welches in der Fig. dargestellt ist. Deshalb nennt man die $x_1 y_1$ Dreiecks-Coordinaten. Wir werden dies so zusammenfassen:



In der Interpretation a) bedeutet unsere

Substitution, dass wir statt der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten Dreieckscoordinaten einführen. Das hat für bestimmte Zwecke seine grossen Vorzüge.

Bei der Interpretation b) wird jedem Punkte xy ein Punkt $x_1 y_1$ zugeordnet, und da ist ganz deutlich, wenn sich $x_1 y_1$ auf einer geraden Linie $A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 = 0$ bewegt, dass dann auch xy sich auf einer Geraden bewegt. Denn wenn wir für $x_1 y_1$ die Werte aus (1) in diese Gl. einsetzen, so wird dieselbe wieder linear in x und y, also

$$Ax + By + C = 0;$$

d. h. Punkte, die auf einer geraden Linie liegen bleiben nach der Transformation auf einer geraden Linie. Nach der Auffassung von b) bedeutet also unsere Substitution eine Transformation der Ebene durch „Collineation".

Dies ist eine Transformation, die in der projektiven Geometrie beständig

benutzt wird: Die Centralprojection einer geraden Linie auf eine Ebene, bleibt eine gerade Linie, ist also eine besondere Art von Collineation.
Geometrisch entsteht die allgemeinste Collineation durch wiederholte Centralprojektion einer Ebene auf eine zweite.
Diese Transformation werden wir nun gerade in der Theorie der Diff. Gleichung zur Anwendung bringen, und da ist die erste Frage, wie transformiert sich das $y_1' = \frac{dy_1}{dx_1}$?
Dazu haben wir das vollständige Differential von x_1 zu bilden. Wir erhalten aus 1.):

$$dx_1 = \frac{(\alpha''x+\beta''y+\gamma'')(\alpha\,dx+\beta\,dy) - (\alpha x+\beta y+\gamma)(\alpha''dx+\beta''dy)}{N^2}$$

$$= \frac{(\alpha'\gamma''-\alpha''\gamma)\,dx+(\beta'\gamma''-\beta''\gamma)\,dy+(\alpha''\beta-\alpha\beta'')(x\,dy-y\,dx)}{N^2}$$

$$dy_1 = \frac{(\alpha'\gamma''-\alpha''\gamma')\,dx+(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')\,dy+(\alpha''\beta'-\alpha'\beta'')(x\,dy-y\,dx)}{N^2}$$

Mithin ist:

2) $y_1' = \frac{dy_1}{dx_1} =$ - - - - -

Somit können wir jetzt auf eine gegebene Diff. Gl. solche Collineation ausüben. Allgemein wird man fragen, ob eine vorgelegte Diff. Gl. $\Omega(x\,y\,y')=0$ durch diese Formeln vereinfacht werden kann, indem man die neuen Coefficienten $\alpha\,\beta\,\gamma\;\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\;\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$ zweckmäßig annimmt! Wir wollen hier jedoch den umgekehrten Gang machen. Wir wollen die ganz einfache Diff. Gl. benutzen, die wir nämlich integrierten, und wollen zusehen, welche allgemeinste Gestalt dieselbe durch ihre Transformationsformeln (1) erhält. Wir hatten das Beispiel

$$dx : dy = bx + cy : b'x + c'y$$

Wir führten die neuen Grössen

$$x_1 = x - m_1 y \qquad y_1 = x - m_2 y$$

ein, wobei

$$dx_1 : dy_1 = \lambda_1 x_1 : \lambda_2 y_1$$

$$\frac{dx_1}{\lambda_1 x_1} = \frac{dy_1}{\lambda_2 y_1}$$

Dies war die Diff. Gl. der W-Curven, die durch Quadratur sofort zu integrieren

war. Wir sehen hier zunächst:
Ein Beispiel für die Vereinfachung einer vorgelegten Diff. Gl. durch zweckmässige Collineation, ist bereits unsere frühere Behandlung der Gl.:

$$dx : dy = bx + cy : b'x + c'y$$

die wir eben durch einfache Collineation in die Gestalt:

$$\frac{dx_1}{\lambda_1 x_1} = \frac{dy_1}{\lambda_2 y_1}$$

transformierten.
Jetzt also wollen wir wie bereits oben gesagt, die Umkehr dazu vornehmen. Es soll uns gegeben sein die Diff. Gl.

$$dx_1 : dy_1 = \lambda_1 x_1 : \lambda_2 y_1 \quad \text{oder}$$

$$\lambda_1 x_1 dy_1 - \lambda_2 y_1 dx_1 = 0$$

Diese Diff. Gl. der W-Curven können wir thatsächlich integrieren und fragen uns nun, welches ist die allgemeinste Gl., die wir auf diese einfache Form durch Collineation bringen können?
Durch Gl. V) geht die vorgelegte Diff. Gl. über in:

$$0 = \lambda_1(\alpha x+\beta y+\gamma)[(\alpha'\gamma''-\alpha''\gamma')dx+(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')dy+(\alpha''\beta'-\alpha'\beta'')(xdy-ydx)$$
$$-\lambda_2(\alpha' x+\beta' y+\gamma)[(\alpha\gamma''-\alpha''\gamma)dx+(\beta\gamma''-\beta''\gamma)dy+(\alpha''\beta-\alpha\beta'')(xdy-ydx)]$$

Das also ist die allgemeinste Diff. Gl., welche wir vermöge einer beliebigen Collineation aus der gegebenen Diff. Gl. herleiten können. Ordnen wir dieselbe zweckmässig, so können wir schreiben:

3) $$0 = (Ax+By+C)dx+(A'x+B'y+C')dy+(A''x+B''y+C'')(xdy-ydx)$$

Wir können unser Resultat so aussprechen: Die allgemeinste Diff. Gl., welche aus der von uns betrachteten besonderen durch beliebige Collineationen hervorgeht, hat immer die Gestalt der Gl. 3). Die Frage ist jetzt: ob umgekehrt jede solche vorgelegte Diff. Gl. durch eine geeignete einfache Collineation auf die einfache Form gebracht werden kann? Das ist in der That der Fall, wie Jakobi in Crelle's Journal Bd. 24, 1842 gezeigt hat, woher der Name „Jakobische Gl." Die Jakobische Begründung kann aus Zeitenmangel nicht gegeben werden; siehe also dortnach.

§ 21. Die Idee der Berührungstransformationen.

Das Wort Berührungstransformation hat zweierlei Bedeutung: Allgemein werden Berührungstransformationen alle Transformationen der Ebene sein, welche Curven, die sich berühren, in Curven überführen, die sich ebenfalls berühren, bei denen also, wie man sagt, die Berührung ein Invarianter Begriff ist. Hierher gehören ins Besondere alle Punkttransformationen. Speziell nennt man aber Berührungstransformationen diejenigen Transformationen der genannten Eigenschaft, die keine Punkttransformationen sind. Wir werden uns dies im folgenden klar zu machen haben, indem wir uns sogleich der allgemeinen Theorie von Lie zuwenden:

Als Grundgebilde der Ebene sehen wir das Linienelement an, d. h. einen Punkt mit einer hindurchgehenden

Geraden. Ein solches Linienelement hat 3 Coordinaten, die beiden Coordinaten x und y seines Punctes und die Richtungscoordinate $z = \operatorname{tg} \varphi$.

Der einzelne Punct in der Ebene, wie auch die Curve erscheinen dabei als Aggregat von einfach unendlich vielen Linien-Elementen. Das eine Mal hat man alle Linienelemente, welche durch den Punct hindurchlaufen, und das andere Mal alle Linienelemente, welche die Curve tangiren.

Nun aber haben diese eben betrachteten einfach unendlich vielen Mannigfaltigkeiten von Linien-Elementen eine characteristische Eigenschaft. Machen wir uns das folgendermassen klar: Wir nehmen z. B. eine einfach unendliche Reihenfolge von Linien-Elementen

nach Art der Fig. und
fragen uns nun, wodurch
unterscheiden sich diese
von den ersteren?

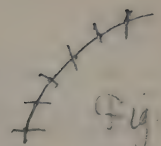
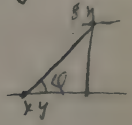


Fig. 3

Ja bei Fig. 1 geht immer das Linien-
element des vorhergehenden Punktes
xy, durch den folgenden Punkt $\xi\eta$
hindurch (genauer gesagt: Der
Abstand des $\xi\eta$ vom Linienelemente
xyz ist ein unendlich kleiner zweiter
Ordnung).
Dieselben sind also an die
Bedingung gebunden:



$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \operatorname{tg} \varphi = z$$

Nun ist aber $(\xi\ \eta) = (x+dx,\ y+dy)$. Wir
erhalten somit die Bedingung: $z = \frac{dy}{dx}$.
Das würde eben bei der Fig. 3 durchaus
nicht der Fall sein. Wir werden daher
sagen: Die einfach unendliche
Mannigfaltigkeit von Linienelementen,
die sich an eine Curve anschliessen,
erfüllen die Relation:

$$dy - z\,dx = 0.$$

Thun das nun die unendlich vielen Elemente auch, die sich an einen Punkt anschliessen? Gewiss, wenn fortgesetzt

$dx = 0 \quad dy = 0.$

Also für Fig. 1 und Fig. 2 gilt gemeinsam:

$$dy - z\,dx = 0.$$

Unter „charakteristischer Mannigfaltigkeit" verstehen wir eine einfach unendliche Reihenfolge von Linienelementen, für welche gilt:

$$dy - z\,dx = 0.$$

Was wird nun eine Berührungstransformation sein? Zunächst ist es eine Transformation der Linienelemente. Ordnen wir einmal dem $x\,y\,z$ ein neues x_1, y_1, z_1 zu gemäss den Gleichungen:

$$x_1 = \varphi(x\,y\,z), \quad y_1 = \psi(x\,y\,z), \quad z_1 = \chi(x\,y\,z)$$

so ist dies die allgemeinste Transformation des Linienelementes aber noch keine Berührungstransformation. Wir wollen jetzt festsetzen, dass bei einer solchen Transformation aus einer

charakteristischen Mannigfaltigkeit wieder eine solche werden soll. Dann muss eben sein: $dy_1 - z_1 dx_1 = 0$. wenn gleichzeitig $dy - z\,dx = 0$. Es muss somit $dy_1 - z_1 dx_1$ ein Multiplum von $dy - z\,dx$ sein, also:

$$dy_1 - z_1 dx_1 = \rho(dy - z\,dx)$$

unter ρ irgend einen Factor verstanden. Jetzt können wir definieren: Eine Transformation der Linienelemente nennen wir eine Berührungstransformation, wenn sie die charakteristischen Mannigfaltigkeiten wieder in solche überführt. Schreiben wir:

$$x_1 = \varphi(x\,y\,z) \quad y_1 = \psi(x\,y\,z) \quad z_1 = \chi(x\,y\,z)$$

so haben wir eine Berührungstransformation, wenn zugleich φ, ψ, χ an die Relation gebunden sind:

$$dy_1 - z_1 dx_1 = \rho(dy - z\,dx).$$

§22. Punkttransformationen sind allgemeinere Berührungstransformationen. Prüfen wir dies an der Punkttransformation

Wir setzen:

$$x_1 = \varphi(x\,y) \qquad y_1 = \psi(x\,y)$$

Das z_1 sollte aber gegeben sein durch die Gl.

$$z_1 = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x} + z\frac{\partial\psi}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + z\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

Die Frage ist nun: Ist dies eine Berührungstransformation im Sinne unserer neuen Definition? Fixieren wir sogleich die Antwort in dem Satze:

Ein spezieller Fall einer Berührungstransformation ist eine Punkttransformation

$$x_1 = \varphi(x\,y) \qquad y_1 = \psi(x\,y)$$

wenn wir dieselbe so erweitern dass wir als dritte Gl. hinzufügen:

$$z_1 = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x} + z\frac{\partial\psi}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + z\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

Das ist in der That eine spezielle Transformation, indem einem Punkte $x\,y$ wieder ein Punkt $x_1\,y_1$ zugehört, während beim allgemeinen Falle dem Punkte $x\,y$ eine Curve entspricht. Schreiten wir zum Beweise

unserer Behauptung: Es ist

$$dx_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \,, \quad dy_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \,.$$

Dies in die Gl. $dy_1 - z_1 dx_1 = 0$ eingesetzt gibt

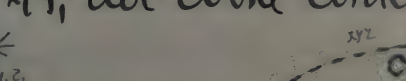
$$0 = \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

Ordnen wir den Zähler anders, so können wir schreiben:

$$dy_1 - z_1 dx_1 = \frac{(dy - z\,dx)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $dy_1 - z_1 dx_1$ wirklich ein Multiplum von $dy - z\,dx$ ist. Dabei ist ρ gleich der sogenannten Functional-determinante $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ dividiert durch den Nenner $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

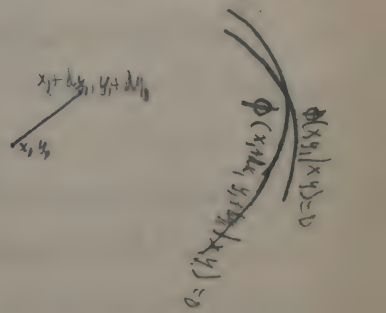
Nun wollen wir die Berührungstransformationen zu verstehen suchen, die keine Punkttransformationen sind. Wir setzen fest, dass den unendlich vielen Elementen, die durch einen Punkt $x_1 y_1$ der Ebene hindurchgehen (Fig)



hindurchgehen, und die durch x_1, y_1, z_1 bezeichnet sind, solche Elemente entsprechen sollen, die längs einer Curve C der Ebene rechterhand aneinander gereiht sind. Gehen wir einmal jetzt synthetisch vor und stellen uns die Gl. $\Phi(x_1, y_1 | x\, y) = 0$ auf, so ist diese als eine Gl. in x und y aufzufassen, in welcher die x_1, y_1 als Parameter auftreten. Diese Gl. soll die Curven der $x\,y$-Ebene vorstellen, welche bez. den Punkten $x_1 y_1$ der anderen Ebene entsprechen. Sie kommt schon bei Plücker vor, der sie Aequatio directrix nennt.

Wir stellen sie an die Spitze der folgenden Betrachtung und fragen uns jetzt, können wir uns eine Berührungstransformation construieren, die diese Aequatio directrix benutzt! Können wir also auffinden, wie sich die Linienelemente der beiden Ebenen links und rechts entsprechen sollen, wenn die Aequatio directrix gegeben ist?

Wir nehmen uns linkerhand einen Punkt x_1, y_1 an und einen zweiten benachbarten x_1+dx_1, y_1+dy_1, und betrachten nun dasjenige Linienelement welches den beiden Punkten gemeinsam ist (Fig.). Nun wollen wir sehen, ob wir rechterhand das Linienelement finden können, das diesem entspricht.



Da entspricht nun dem Punkte x_1, y_1 die Curve $\phi(x_1, y_1 | x\ y)=0$, und ebenso dem benachbarten Punkte x_1+dx_1, y_1+dy_1 eine Nachbarcurve

$$\phi(x_1+dx_1,\ y_1+dy_1 | x\ y)=0.$$

Dem gemeinsamen Elemente der beiden Punkte für den Grenzfall, dass sie immer näher und näher rücken, entspricht dasjenige Linienelement, welches den beiden Curven gemeinsam ist, d.h. welches im Schnittpunkt der beiden Curven (die in der Grenze zusammenfallend) dieselben berührt.

wir drücken wir das analytisch aus?
Zunächst wie lauten die Coordinaten
des Schnittpunktes?
wir finden sie durch Nebeneinanderstellen
der 4 Gleichungen beider Curven:

1. $\phi = 0 \quad , \quad \phi + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y_1} dy_1 = 0$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y_1} dy_1 = 0$$

oder

2. $$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + z_1 \frac{\partial \phi}{\partial y_1} = 0$$

welche uns mit (1) genommen den
Schnittpunkt $x_1 y_1$ (rechterhand) festlegt.
Die Richtung des Tangentialelements
rechterhand aber ist gegeben durch:

3. $$\frac{\partial \phi}{\partial x} + z \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

wir fassen zusammen:
Das Linienelement, welches dem
linkerhand gegebenen Linienelement
$x_1 y_1 z_1$ entspricht, muss aus den drei
4 Gleichungen berechnet werden:
1.) $\phi = 0$ 2.) $\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial y_1} z_1 = 0$ 3.) $\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} z = 0$.

Die Frage wird wieder sein: Ist das eine Berührungstransformation? Wir werden finden, dass dies thatsächlich der Fall ist, wie auch immer die Aequatio directrix gegeben sein mag.

Dies werden dann die Formeln für alle diejenigen Berührungstransformationen sein, welche keine Punkttransformationen sind, was im Folgenden näher zu begründen ist.

Sehen wir zu, welches Linienelement dem Linienelement $x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1$ zugeordnet ist. Wir bezeichnen dasselbe mit $x+dx, y+dy, z+dz$ und werden unsere 3 Gleichungen mit diesen abgeänderten Coordinaten hinschreiben: Wir erhalten:

1a) $\Phi(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1 \mid x+dx, y+dy) = 0$

2a) $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\right)_{x_1+dx_1, y_1+dy_1, z_1+dz_1 \mid} = 0$

3a) $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + z \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{x_1+dx_1, y_1+dy_1, z_1+dz_1 \mid} = 0$

Entwickeln wir die Gl. 1a) nach den Inkrementen, so sehen wir, dass zu dem

ersten Glieds $\phi = 0$ noch der Ausdruck:

1') $\frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$

hinzutritt. Entsprechend bilden sich dann aus Gl. 2a) und Gl. 3a) resp.

2') $\frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + z_1 \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \right)_{x_1 + dx_1} \cdots}{\partial x} dx_1 + \cdots\cdots = 0$

3') $\frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + z \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{x_1 + dx_1} \cdots}{\partial x} dx + \cdots\cdots = 0$

Hat man also durch die Gl'en 1), 2), 3) einem Elemente x_1, y_1, z_1 ein bestimmtes Linienelement $x\ y\ z$ zugeordnet, so werden die Gl'en 1', 2', 3' ergeben, welche dx, dy, dz gegebenen dx_1, dy_1, dz_1 entsprechen, d. h. welche benachbarten Elemente rechterhand und linkerhand sich entsprechen.

Wir haben nun zu zeigen, dass die Gl.

$$dy_1 - z_1 dx_1 = \rho (dy - z\, dx)$$

als Folge der 6 vorstehender Gleichungen besteht.

Setzen wir in Gl. 1') für das erste Glied seinen Wert aus Gl. 2) ein und für das dritte Glied seinen Wert aus Gl. 3),

so haben wir:

1'' $$-z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} dy_1 - z \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0.$$

Ordnen wir dies zweckmässig, so bekommen wir:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}(dy_1 - z_1 dx_1) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}(dy - z dx)$$

$$dy_1 - z_1 dx_1 = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}}(dy - z dx).$$

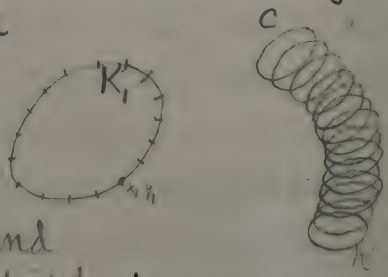
Damit ist in der That gezeigt, dass $dy_1 - z_1 dx_1$ ein Multiplum von $dy - z dx$ ist. Wir fassen das Endresultat in die Worte zusammen:

Die Transformation der Linienelemente, welche wir probeweise in Ansatz brachten, indem wir die Aequatio directrix voranstellten, ist wirklich eine Berührungstransformation.

§ 23. Geometrische Bedeutung dieser allgemeinen Berührungstransformationen. Was bedeutet nun diese Berührungstransformation geometrisch?

Wir hatten doch dem Punkte x_1, y_1 linkerhand vermöge der Aequatio directrix eine Curve C rechterhand zugeordnet. Das entspricht zugleich dem Umstande, dass die Linienelemente, die durch x_1, y_1 linkerhand gehen, sich rechterhand zu einer Curve C aneinanderreihen.

Daraufhin können wir nun sogleich an Hand der Figur den neuen Satz aussprechen: Eine Curve K_1 linkerhand entspricht rechterhand das Umhüllungsgebilde K aller derjenigen Curven C, welche den Punkten von K_1 zugeordnet sind.



Dies ergiebt sich leicht auf folgende Weise: Wir verstanden unter K_1 doch die Aneinanderreihung der Linienelemente, die je zwei aufeinanderfolgenden Punkten x_1, y_1 gemeinsam ist. Dem entsprechen nun rechterhand die

R ihenfolge derjenigen Linienelemente, die je zwei benachbarten Curven C gemeinsam sind, welche also den Schnittpunkten zweier benachbarter Curven angehören. Das ist aber die Umhüllende. Die ganze Ausdrucksweise ist eben nur eine andere Formulierung dessen, was wir bei der Aufstellung der Gleichungen 1, 2, 3) früher ohnehin überlegt haben. Wir werden wir umgekehrt, wenn rechterhand ein Punkt $x\,y$ gegeben ist, die entsprechende Curve K_1 finden, und wie, wenn rechterhand eine Curve K gegeben ist, die entsprechende Curve K_1 eines? Dazu brauchen wir nur unsere Gleichungen betrachten:

$$\Phi(x_1, y_1 | x\,y) = 0\,, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0\,, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + z \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

Da haben wir bisher die subjektive Festsetzung getroffen, dass x_1, y_1 als Parameter, $x\,y$ als laufende Coordinaten zu betrachten sind. Da diese Gleichungen in ihrer Bauart ganz symmetrisch

sind in den $x\,y$ und x_1, y_1, so können wir sofort folgenden Satz aussprechen: Die umgekehrte Berührungstransformation ordnet den Punkten $x\,y$, welche rechterhand auftreten, auf der linken Hand diejenigen Curven C_1 zu, welche durch die Aequatio directrix dargestellt werden, wenn wir in derselben die $x\,y$ als Parameter, die x_1, y_1 als laufende Coordinaten ansehen.

Ebenso können wir jetzt auch die andern früheren Sätze genau wiederholen, indem wir die accentuierten und nicht accentuierten Buchstaben vertauschen.

Wir wollen hierzu ein einfaches Beispiel durchrechnen, schicken jedoch folgende historische Bemerkung voraus:

Die Berührungstransformation ist für die Geometrie eines der schönsten und fruchtbarsten Gebiete, indem man von einem bekannten einfachen Gebilde auf das transformierte schliessen kann.

Leider werden diese Dinge meist nicht gehörig gewürdigt. Was überhaupt die Fortschritte auf dem Gebiete der Geometrie anbelangt, so trat im Jahre 1822 Poncelet mit seiner géométrie projective hervor, die man heutzutage immer noch vielfach neuere Geometrie nennt. Dann setzte mit dem Jahre 1870, von Lie ausgehend, eine neue Periode in der Entwicklung der Geometrie ein, indem an Stelle der projektiven Geometrie die allgemeine Transformationsgeometrie (die neueste Geometrie) trat, die aber, wie schon oben gesagt, noch lange nicht gehörig gewürdigt wird.

§ 24. Die Correlation als Beispiel.

Geben wir jetzt ein Beispiel von Berührungstransformation, die keine Punkttransformation ist: Wir nehmen unsere Aequatio directrix in beiden Coordinaten genau linear,

also von der Form:

$(a x_1 + b y_1 + c)x + (a' x_1 + b' y_1 + c')y + (a'' x_1 + b'' y_1 + c'') = 0$

Wie ist dann unsere Berührungstransformation zu deuten?

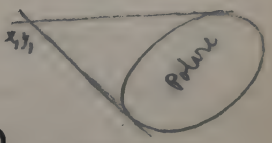
Halten wir $x_1 y_1$ fest, so haben wir in laufenden Coordinaten $x y$ eine gerade Linie C.

Halten wir $x y$ fest, so haben wir in laufenden Coordinaten $x_1 y_1$ ebenfalls eine Gerade G.

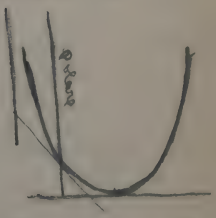
Wir sahen dem Punkte der einen Ebene entspricht immer ein Punkt der anderen Ebene. Diese spezielle Berührungstransformation ist in der projektiven Geometrie unter dem Namen dualistische Transformation oder Correlation längst bekannt, insofern man dort den Punkten der einen Ebene nicht beliebige Curven sondern gerade Linien als Gegenbilder gegenüberzustellen sucht.

Ein spezieller Fall dieser Correlation ist die sogenannte Polarreciprocität in

Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt, die darin beruht, dass man jedem Punkte $x_1 y_1$ der Ebene diejenige gerade Linie zuordnet, welche durch die Berührungspunkte des von dem Punkte $x_1 y_1$ an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten geht.



Wir nehmen hieraus wieder einen ganz speziellen Fall: Der Kegelschnitt sei eine Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$. Die Frage ist: wie heisst die Polare zum Punkte $x_1 y_1$ in Bezug auf die Parabel?



Nach bekannten Regeln: $y + y_1 = x x_1$.

Dabei wollen wir beachten dass, wenn der Punkt $x_1 y_1$ auf die Parabel rückt, die gerade Linie, also die Polare, Tangente in dem Punkte wird.

Es werden also alle Linienelemente die durch den Punkt $x_1 y_1$ gehen, sich in Linienelemente transformieren, deren Aneinanderreihung eben die Polare ist.

Wir legen die Aequatio directrix

1) $\Phi = y + y_1 - x x_1 = 0$

zu Grunde, und es gelten dann, wenn unsere Transformation eine Berührungstransformation ist, nach obigem die weiteren Gleichungen:

2) $-x + z_1 = 0$, 3) $-x_1 + z = 0$

Aus diesen 3 Gleichungen kann man also das Linienelement berechnen, welches einem gegebenen $x_1 y_1 z_1$ entspricht. Lösen wir die 3 Gleichungen nach $x\ y\ z$ auf, so ergiebt sich:

$$x = z_1, \quad y = -y_1 + x_1 z_1, \quad z = x_1$$

und nach x_1, y_1, z_1 aufgelöst:

$$x_1 = z \qquad y_1 = -y + x z \qquad z_1 = x$$

Hierdurch müsste also nach den früheren Sätzen eine Berührungstransformation vermittelt werden. Rechnen wir das kurz nach: wir haben

$$dx_1 = dz, \quad dy_1 = -dy + x\,dz + z\,dx, \quad dz_1 = dx$$

Setzen wir diese Werte in $dy_1 - z_1 dx_1$ ein, so bekommen wir

$$dy_1 - z_1 dx_1 - dy + x dz + z dx - x dz = -(dy - z dx).$$

und damit ist thatsächlich bewiesen, dass

unsere Transformation eine Berührungstransformation ist; denn sie transformiert $dy_1 - z_1 dx$ einfach in $-(dy - z\,dx)$.
Es ist nun natürlich eine Sache der Uebung, die Gestalten der Transformationen aus gegebenen Gebilden schnell zu finden. Ich möchte an dieser Stelle mich auf meine Leipziger Vorlesung über projektive Geometrie beziehen.

§ 25. Anwendung der Berührungstransformationen auf Diff. Gleichungen. Theorie der Clairautschen Gleichungen. Die allgemeine Transformation der Berührungstransformation der Linienelemente wurde vermittelt durch die Gleichungen

$$x_1 = \varphi(x\,y\,z) \quad y_1 = \psi(x\,y\,z) \quad z_1 = \chi(x\,y\,z)$$

wobei

$$dy_1 - z_1 dx_1 = \rho(dy - z\,dx).$$

und der besondere Fall der Berührungstransformation durch die Gleichungen

$x_1 = z \quad y_1 = xz - y \quad z_1 = x$

oder

$x = z_1 \quad y = x_1 z_1 - y_1, \quad z = x_1.$

Die Frage ist nun wie wirkt eine solche Berührungstransformation auf eine Diff. Gl.? Machen wir uns vorerst eine Vorstellung davon, was ist eine Diff. Gl. und was heisst es, sie integrieren! Wir wollen hierbei an eine frühere Ideenbildung anknüpfen: Wir schrieben statt

$$\Omega(x\ y\ y') = 0$$

die beiden Gleichungen

$$\Omega(x\ y\ z) = 0 \qquad dy - z\,dx = 0$$

und verbanden damit die Idee, dass die Diff. Gl. $\Omega(x\ y\ z) = 0$ aus der Zahl der dreifach unendlich vielen Linienelemente, die es überhaupt gibt, eine zweifach unendliche Schar heraushebt.
Was wollen wir nun mit diesen Linienelementen machen? Wir wollen diese aneinanderreihen entsprechend der Gl. $dy - z\,dx = 0$. Wir formulieren dies in dem Satz: Die Gl. $\Omega = 0$ integrieren, heisst die

zweifach unendlich vielen Linienelemente der Gl. entsprechend der Relation $dy - z\,dx = 0$ zu charakteristischen Mannigfaltigkeiten zusammenzufassen.

Wenn wir in dieser Weise den Gegenstand der Diff.-Gl'en auffassen, so ist es klar, was die Berührungstransformation bedeutet. Dieselbe verwandelt eben die Linienelemente der gegebenen Gl. in Linienelemente einer transformierten Gl. Und das ist nun gerade das Wesen der Berührungstransformation, dass sie aus der Gl. $dy - z\,dx = 0$ die Gl. $dy_1 - z_1 dx_1 = 0$ ableitet, d. h. dass sie die charakteristischen Mannigfaltigkeiten, die sich aus den Elementen von $\Omega = 0$ zusammensetzen lassen, genau in die charakteristischen Mannigfaltigkeiten verwandelt, die sich aus den Elementen von $\Omega_1 = 0$ zusammensetzen lassen. Hat man aber die eine Gl. integriert, so hat man auch die andere integriert, denn die Integrale der einen Gl. gehen aus den Integralen

der anderen Gl. durch die Berührungs-transformation hervor.

Infolgedessen können bei der Integration der Diff. Gl. $\Omega = 0$ Berührungstransformationen genau so zum Zwecke der Vereinfachung gebraucht werden, wie blosse Punkttransformationen.

Diese letzten Betrachtungen wollen wir nun an dem berühmten Beispiel der Clairaut'schen Gl. durchprobieren.

Dieselbe heisst:

$$y = x\,y' - \varphi(y')$$

wo $\varphi(y')$ irgend wie gegeben sein soll.

Wir werden also schreiben:

$$0 = x\,z - y - \varphi(z)$$

und daneben

$$dy - z\,dx = 0$$

Auf diese Diff. Gl. wollen wir nun unsere Berührungstransformation, die wir bei der Parabel kennen lernten, anwenden. Wir hatten die Transformationsgleichungen:

$$x = z_1 \quad , \quad y = x_1 z_1 - y_1 \quad ; \quad z = x_1$$

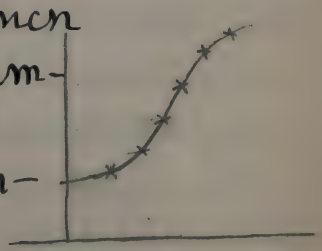
Setzen wir dies in die gegebene Gl. ein, so wird:

$$0 = y_1 - \varphi(x_1)$$

Das ist in der That eine verblüffend einfache Gl., in der nicht einmal der Diff. Quotient $y_1' = z_1$ vorkommt. Was heisst nun eine solche Gl.? Wir haben zunächst im rechtwinkligen Coordinatensystem eine Curve

$$y_1 = \varphi(x_1)$$

Die Bedeutung derselben ist nun, dass durch jeden Punkt derselben noch einfach unendlich viele Linienelemente hindurchgehen. Wir können



daher sagen: Die transformierte Gl. hebt aus der Gesamtheit aller Linienelemente diejenigen zweifach ∞ vielen heraus, deren Mittelpunkte auf einer festen Curve $y_1 = \varphi(x_1)$ liegen. Insofern dürfen wir diese Gl. also doch als Diff. Gl. bezeichnen, indem wir einfach noch daneben schreiben:

$dy_1 - z_1\, dx_1 = 0$

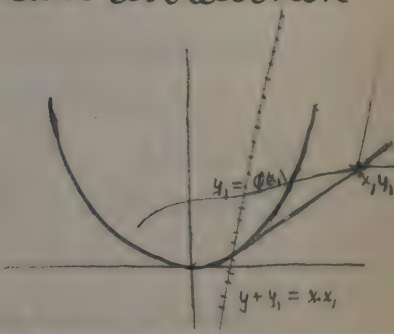
Dabei heben wir noch ausdrücklich hervor, dass wir vorhin nicht sagten, die Linienelemente sollten zu Curven aneinander gereiht werden, sondern allgemein zu charakteristischen Mannigfaltigkeiten. Daher können wir jetzt den Satz aussprechen:

Entsprechend unserer allgemeinen Auffassung ist eine solche Gl. $y_1 = \varphi(x_1)$ eo ipso integriert. Nämlich es wird das allgemeine Integral vorgestellt durch die einzelnen Punkte, welche unsere Curve trägt: Jeder einzelne dieser Punkte aufgefasst als Contour der durch ihn hindurchlaufenden Linienelemente. Dazu kommt dann als singuläre Lösung, als Umhüllungsgebilde, die Curve $y_1 = \varphi(x_1)$ selbst.

Wir haben also hier gar keine Quadraturen mehr nötig; die Integration ist von vornherein als erledigt anzusehen.

Gehen wir jetzt zur Clairaut'schen

Diff. Gl. zurück, so verwandeln sich die Punkte unserer Curve $y_1 = \varphi(x_1)$ in lauter gerade Linien, nämlich in die Polaren hinsichtlich der zu Grunde liegenden Parabel; d.h. die Linienelemente, die sich an einen Punkt $x_1 y_1$ anschliessen, verwandeln sich in die Linienelemente, welche die genannte Polare überdecken



Unsere Curve $y_1 = \varphi(x_1)$ verwandelt sich in das Umhüllungsgebilde der Polaren.

Daher können wir so resumieren:

Die allgemeine Integrale der Clairaut'schen Gl. werden uns eben durch diese Polaren der Punkte unserer Curve linienhaft geliefert. Dazu tritt noch als singuläre Lösung das Umhüllungsgebilde dieser Polaren.

Jetzt haben wir noch die analytische Formulierung zu geben:

Die allgemeinen Integralcurven der

Clairaut'schen Diff. Gl. haben die Gl.

1) $y = x_1 \cdot x - \varphi(x_1) \qquad (= x_1 x - y_1)$

Das ist eine Schar von ∞ vielen geraden Linien, deren Parameter x_1 ist. Das Umhüllungsgebilde derselben ergiebt sich aus den Gleichungen zweier benachbarten geraden Linien-, also

$y = x_1 x - \varphi(x_1)$, $y = (x_1 + dx_1)x - \{\varphi(x_1) + \varphi'(x_1)\, dx\}$

oder

$y = x_1 x - \varphi(x_1) \qquad 0 = x - \varphi'(x_1)$

Will man nun die Gl. der Enveloppe haben, so müsste man das x_1 eliminieren wir können aber auch x und y durch den Parameter x_1 ausdrücken. Alsdann hat man:

2) $x = \varphi'(x_1)$, $y = x_1 \varphi'(x_1) - \varphi(x_1)$

Die Schar der allgemeinen Integralcurven ist uns also gegeben durch Gl. (1) und die Enveloppe dieser Integralcurven, welche als singuläre Lösung anzusehen ist, ist uns durch die Gl. (2) in Parameter dargestellt gegeben.

Damit hatten wir die Clairaut'sche

Diff. Gl. wirklich integriert, und es erforderte nur noch zu verifizieren, dass dies nun auch richtig geschehen ist. Was die geraden Linien der Gl. 1) angeht, so ist für dieselben $y' = x_1$, sodass die Gl. dieser geraden Linien $y = x x_1 - \varphi(x_1)$ thatsächlich die Clairaut'sche Diff. Gl. $y = y' x - \varphi(y')$ befriedigt.

Aus den Gleichungen 2) ergiebt sich:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x_1 \varphi''(x_1) + \varphi'(x_1) - \varphi'(x_1)}{\varphi''(x_1)} = x_1$$

und damit ist gezeigt, dass auch die Enveloppe die gegebene Diff. Gl. befriedigt.

2. Neue Lie'sche Entwicklungen.

§ 26. Die Separation der veränderlichen bei den homogenen Gleichungen.

Wir wollen jetzt drittens eine ganze Classe von Diff. Gleichungen kennen lernen, die man ebenfalls durch Punkttransformation vereinfachen kann. Das sind die Diff. Gleichungen von der Form:

I. $$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

wo f homogen in y und x vom 0^{ten} Grade ist.

Setzen wir $\frac{y}{x} = t$ so bedeutet $\frac{y}{x} = t$ eine Schar von geraden Linien, in denen t als Parameter auftritt. Diese gehen alle durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems und nun wird durch Gl. I jedem Punkte sein y' zugeordnet, und zwar ist die Richtung der Elemente für alle Punkte einer durch den Anfangspunkt

laufenden geraden Linie allemal dieselbe.
Es ist also

$$y = xt \quad , \quad y' = t + xt'$$

Dies in I eingeführt, ergibt

$$t + xt' = f(t)$$

$$xt' = x\frac{dt}{dx} = f(t) - t.$$

Hier führt nun die Separation der Variable zu

$$\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}.$$

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \log x + C.$$

wo auf der linken Seite je nach der Function $f(t)$ noch die Integration auszuführen ist.

Wir begleiten dies mit den Worten:
Eine homogene Diff. Gl. lässt sich sofort durch Separation der Variablen behandeln, sobald man den Quotienten $\frac{y}{x} = t$ als neue Veränderliche einführt.
Damit hört gewöhnlich in den Lehrbüchern die Betrachtung auf; während wir nun gerade hier die Lie'schen Betrachtungen anwenden,

welche uns den tieferen Grund dafür liefern werden, weshalb die Substitution $\frac{y}{x} = t$ so schnell zur Separation der Variablen führt.

Wir schreiben uns dasselbe Formelsyst noch einmal mit einer kleinen Änderu der Gestalt hin:

$$t + x\frac{dt}{dx} = f(t).$$

und führen nun $\log x \equiv u$ als neue Variab ein. Dann ist

$$t + \frac{dt}{du} = f(t).$$

$$u = \int \frac{dt}{f(t) - t}$$

Wir begleiten dies mit den Worten: Indem wir die Variablen t und u einführen, erreichen wir die Vereinfachung, dass das u selbst in der Diff.G gar nicht vorkommt, sondern nur das du, worauf eine einfache Quadratur die Integration der Diff. Gl. vollendet.

§ 27. Erklärung des Verfahrens an der zugehörigen Transformationsgruppe.

Fragen wir nach dem inneren Grunde, warum diese einfache Umgestaltung hier zum Ziele führt!
Erinnern wir uns der letzten Fig., so bekommen wir für alle Punkte der einzelnen von O auslaufenden geraden Linien dieselbe Richtung der Linienelemente. Das spricht sich noch typischer folgendermassen aus: Schreiben wir:

$$y_1 = \lambda y \,, \quad x_1 = \lambda x$$

so bedeuten diese Formeln eine vom Anfangspunkte ausgehende Aehnlichkeitstransformation; d.h. es wird irgend eine Figur der xy-Ebene durch die Gleichungen in eine ähnliche verwandelt, wobei die Richtungen und damit auch die Winkel dieselben bleiben, die Längen aber grösser oder kleiner je nachdem $\lambda \gtrless 1$ ist.
Aus unserer Diff. Gl. $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ wird dann durch diese Transformation:

$$y_1' = f\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$$

d. h. die Diff. Gl. bleibt durch die Ähnlichkeitstransformation ungeändert oder wie man sagt, die Diff. Gl. läßt die Ähnlichkeitstransformation zu. Da der Parameter λ in der Diff. Gl. gar nicht auftritt, so gibt es von Haus aus ∞ viele vom Anfangspunkte auslaufende Ähnlichkeitstransformationen, welche die homogene Diff. Gl. in sich überführen.

Diese Transformationen besitzen nun noch die sogenannte Gruppeneigenschaft. Unter einer Gruppe von Transformationen versteht man einen solchen Inbegriff von Transformationen, der die Eigenschaft hat, daß zwei Transformationen aneinandergereiht selbst wieder eine Transformation derselben Art ergeben.

Nehmen wir einmal die Ähnlichkeitstransformation:

$$y_1 = \lambda y \quad , \quad x_1 = \lambda x$$

und reihen wir daran die zweite Ähnlich

keitstransformation

$$y_2 = u y_1 \quad x_2 = u x_1$$

dann werden sich y_2 und x_2 durch die ursprünglichen y und x so ausdrücken:

$$y_2 = \lambda u y \quad x_2 = \lambda u x.$$

Das ist in der That wieder eine Aehnlichkeitstransformation, und wir sehen daher, unsere Aehnlichkeitstransformationen bilden eine Gruppe.

Man nennt diese Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen eingliedrig, weil nur ein Parameter λ auftritt, sie heisst continuierlich, weil der Parameter jeden beliebigen Wert annehmen kann.

Insbesondere wollen wir jetzt noch lernen, was man unter einer unendlich kleinen Substitution versteht.

Setzen wir einmal $\lambda = 1$, so haben wir

$$y_1 = y \quad x_1 = x$$

Das ist die sogenannte identische Substitution.

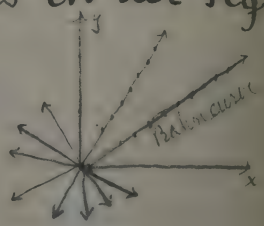
Ist aber λ dem Werte 1 sehr nahe, etwa $= 1+\varepsilon$, wo ε eine sehr kleine Grösse, so erhalten wir:

$y_1 = (1+\varepsilon)y \qquad x_1 = (1+\varepsilon)x$

und das ist die ∞ kleine Substitution.
Die Zunahme von y also εy bezeichnen wir mit
und " " " x " εx " " "
wir werden dann sagen können:
Bei der ∞ kleinen Operation der Gruppe
erleidet jeder Punkt x y eine Verschiebung
welche gegeben ist durch

$$\delta y = \varepsilon y \qquad \delta x = \varepsilon x.$$

Das bedeutet nun folgendes in der Figur
Dass nämlich irgend ein
Punkt x y in Richtung
der durch den Anfangs-
punkt gehenden Geraden
um eine ∞ kleine Strecke
verschoben wird, deren Coordinaten
δx und δy mit x und y proportional sind
so dass die Verschiebungen mit der
Entfernung vom Anfangspunkt
grösser und grösser werden. Um nun
eine bestimmte endliche Verschiebung
zu erhalten, müssen wir diese Operation
mehrmals nacheinander ausführen.



Man kann sich also vorstellen, dass diese ganze eingliedrige Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen aus der ∞ kleinen durch immer fortgesetzte Transformation hervorgeht. Der Punkt fliesst dabei sozusagen an der geraden Linie entlang.

Wir fassen zusammen: Indem wir die Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen aus der ∞ kleinen Transformation durch immer fortgesetzte Wiederholung erzeugen, fliessen die Punkte der Ebene vom Coordinatenanfang weg geradlinig fort, so dass in jedem einzelnen Momente, das neue Punktsystem mit dem anfänglichen ähnlich ist. Man kann dabei an eine Flüssigkeit denken, die die Ebene überdeckt, und die nach dem angegebenen Gesetze fliesst.

Man nennt diese Curven nach denen die Punkte dabei laufen, die Bahncurven.

In unserem speziellen Beispiele lautet also die Gl. derselben: $\frac{y}{x} = \text{const.}$
Diese Bahncurven verschieben sich in sich selbst und zwar sind die Bahncurven die einzigen Curven, welche sich bei unserer Aehnlichkeitstransformation in sich selbst verschieben, während jede andere Curve eine immer grösser werdende seitliche Verschiebung erleidet.
Gehen wir zu unserer Diff. Gl. zurück und sehen wir zu, wie sich die t und u bei der Transformation ändern.
Wir sehen es wird: $t_1 = t$
und aus $u = \log x$ wird $u_1 = u + \log \lambda$.
Wir werden daher sagen: Die neuen Variablen, welche uns die Integration der Diff. Gl. ermöglichen, sind genau in Anschluss an die Figur gewählt: t ist nämlich direkt ein Parameter für die Bahncurven ($t = \text{const.}$) und ändert sich bei der Transformation der Gruppe gar nicht; u aber ist so

gewählt, dass die Curven $u = \text{const.}$ sich bei der Transformation der Gruppe untereinander vertauschen, speziell nach der Formel:

$$u_1 = u + \log \lambda .$$

28. Entsprechender allgemeiner Ansatz. Im Anschluss hieran wollen wir sogleich einen allgemeineren Satz aussprechen, der sich jetzt mit Leichtigkeit ergiebt: Wenn eine Diff. Gl.

$$\Omega(x\ y\ y') = 0$$

vorgelegt ist, und ferner eine eingliedrige continuierliche Gruppe durch die Formeln:

$$x_1 = \varphi_1(x\ y\ \lambda) \qquad y_1 = \psi_1(x\ y\ \lambda)$$

wo λ ein beliebiger veränderlicher Parameter ist, dann kann man neue veränderliche t und u einführen, sodass u selbst nicht mehr in der transformierten Diff. Gl. vorkommt, sondern nur das du, worauf man durch eine einfache Quadratur die Gl. integriert.

Es möge entstanden sein:

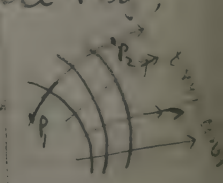
$$\bar{\Omega}\left(t, \frac{dt}{du}\right) = 0$$

so werden wir bekommen:

$$\frac{dt}{T(t)} = du$$

$$\int \frac{dt}{T(t)} = \int du$$

Die Frage ist nun, wie wählen wir die neuen veränderlichen t und u: wir denken uns, dass durch ∞ oftmalige Wiederholung einer ∞ kleinen Transformation eine eingliedrige Gruppe erzeugt sei, dann gibt es eine Schar von Bahncurven, an denen sich die Punkte der Ebene der Transformation entsprechend fortschieben. Diese Bahncurven mögen nun die Gl. haben: $t(x,y) = \text{const}$. Damit ist t eingeführt als eine Grösse, welche sich bei der ganzen Gruppe der Transformation nicht ändert. Man vergl. die Fig., in welcher sowohl für den Punkt P, wie für den durch eine endliche Transformation



gegebenen Punkt P_2 die Gl. $t = t_1$ gilt, unabhängig von dem Werte von λ. Für dieses t heissen die sämtlichen Transformationen unserer Gruppe $t_1 = t$, die ∞ kleine Transformation $\delta t = 0$. Jetzt aber müssen wir auch eine geeignete zweite veränderliche v finden: Legen wir einmal eine beliebige Curve durch unsere Bahncurve quer hindurch, so werden wir bei wiederholter Transformation eine ganze Schar von solchen Trajektorien bekommen, deren Gl. wir zunächst irgend wie in der Form ansetzen wollen: $v(x\,y) = \text{const.}$

Wie ändert sich nun das v bei einer Transformation der Gruppe, speziell bei der ∞ kleinen?

Allgemein werden wir schreiben: $\delta v = \sigma(v)\,\varepsilon$

Weil aber aus einer Curve $v = \text{const.}$ wieder eine Curve $v = \text{Const.}$ werden soll, kann dieses σ nur von v selbst nicht von t abhängen. Wir haben also $\delta v = \sigma(v)\,\varepsilon$.

Wir können daher sagen: Die ∞ kleine Transformation der Gruppe stellt sich in der Variable v in der Gestalt dar: $\delta v = \varphi(v)\cdot\varepsilon$
Wir führen jetzt statt v eine Funktion von v, die wir u nennen, ein, und die definiert ist durch die Gl.

$$du = \frac{dv}{\varphi(v)} \quad \text{oder}$$

$$u = \int^{v} \frac{dv}{\varphi(v)}.$$

Natürlich können wir jetzt statt v auch u als Parameter einer Trajektorienschar benutzen, d. h. die einzelne Trajektorie ist ebensowohl durch Constantsetzen des u und des v gegeben. Für die Funktion u heisst dann die ∞ kleine Transformation

$$\delta u = \varepsilon$$

wozu von oben

$$\delta t = 0$$

tritt, und wenn wir von ihr zur endlichen Gruppe übergehen, so wird diese heissen:

$$t_1 = t \qquad u_1 = u + \text{const.}$$

wo die Constante als Parameter aufzufassen ist. Wir gewinnen daher das Resultat:

Jede eingliedrige continuierliche Transformationgruppe der hier betrachteten Art lässt sich durch Einführung geeigneter veränderlicher t und u in die kanonische Form bringen:

$$t_1 = t \qquad u_1 = u + \text{const.}$$

Bei dem Fall unserer Aehnlichkeitstransformation hatten wir für t $\frac{y}{x}$ und $\log x$ für u.

Wir können jetzt die Diff. Gl.

$$\Omega(x\ y\ y') = 0,$$

welche diese eingliedrige Gruppe gestattet in die Form schreiben:

$$\bar{\Omega}\left(t\ \frac{dt}{du}\right) = 0.$$

In der That müssen wir verlangen, dass die Gl. ungeändert bleibt, wenn wir $t = t_1$ belassen und u nur um eine Constante vermehren. Wir können daher den Satz aussprechen:

Führen wir die kanonischen Variable ein, so erhalten wir aus der Diff. Gl. $\Omega(x\ y\ y') = 0$ eine neue $\bar{\Omega}\left(t, \frac{dt}{du}\right) = 0$ in welcher die neue Variable u nicht mehr explicite vorkommt.

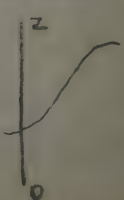
Eine solche Gl. aber, wo u nicht mehr explicite vorkommt, ist nach Trennung der Variablen durch eine einfache Quadratur zu integrieren.
Wir erhalten nämlich sofort:

$$\frac{dt}{du} = F(t), \quad u = \int \frac{dt}{F(t)}.$$

Das ist die allgemeine Theorie, die wir speziell auf den Fall der homogenen Diff. Gl. anwandten.

§ 29. Die Asymptotencurven auf den Schraubenflächen als Beispiel.

Nehmen wir als Beispiel die Diff. Gl. der Asymptotencurven auf einer Schraubenfläche (wir könnten ebensowohl, bei vertikalgestellter Schraubenaxe, die Curve stärksten Falles nehmen), wie sie durch Verschraubung einer beliebigen Meridiancurve entsteht.
Eine solche Fläche geht durch eine eingliedrige Gruppe in sich über, und zwar eben



durch Schraubenbewegung. Haben wir eine Asymptotencurve und verschrauben wir die Fläche um die Spindel Oz, so bleibt die Curve immer Asymptotencurve und die Schar dieser geht also dabei in sich selbst über. Die Projectionen der Asymptotencurven auf xy müssen also in einander übergehen, wenn man xy um O dreht. Es sei:

$$z = F(x\,y)$$

die zu betrachtende Schraubenfläche mit der Spindel Oz. Die Diff. Gl. der Asymptotencurven lautet bekanntlich:

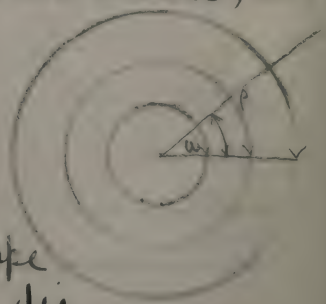
$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$$

von dieser Diff. Gl. wissen wir nach dem Gesagten, dass sie ungeändert bleibt, wenn wir die xy-Ebene um O drehen. Ja, dann sind die Bahncurven der Transformation concentrische Kreise, die bei der Drehung fortgesetzt in sich selbst übergehen. Also $\rho = \rho_1$ ist die Gl. eines solchen Kreises und damit haben wir die erste kanonische Variable

bereits gefunden.
Jetzt müssen wir noch die zweite u. auch
die sich bei der Drehung nur additiv änd
Das ist offenbar der Polarwinkel ω, der
durch eine Drehung in

$$\omega_1 = \omega + \text{Const.}$$

übergeht. Wir gewinnen
daher den Satz:



Um die eingliedrige Gruppe
der Drehungen um O in die
kanonische Form zu setzen, genügt es
Polarcoordinaten einzuführen. In der
That schreibt sich dann die Gruppe
der Drehungen in diesen Grössen:

$$\rho_1 = \rho \qquad \omega_1 = \omega + \text{Const.}$$

wo die Constante der Parameter der Gruppe
Wir bekommen daraufhin etwa die
neue Diff. Gl.

$$L\,d\rho^2 + 2M\,d\rho\,d\omega + N\,d\omega^2 = 0$$

Hierin werden nun die L, M, N nicht
mehr von ω abhängen, sondern nur vom ρ.
Lösen wir die Gl. nach $\frac{d\rho}{d\omega}$ auf, so erhalten
wir:

$$\frac{d\rho}{dw} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 2n}}{2}$$

und daraus:

$$w = \int \frac{2\, d\rho}{-m \pm \sqrt{m^2 - 2n}}$$

Wir begleiten dies mit den Worten:
Haben wir eine Schraubenfläche um Oz als Spindel, so werden wir deren Asymptotencurven durch Quadratur bestimmen, indem wir in der Horizontalebene Polarcoordinaten einführen.
Diese Sätze haben wir nicht durch Ausrechnung bekommen, sondern durch blosse Ueberlegung, und es mag daher im folgenden die Verification durch unmittelbare Ausrechnung erfolgen:
Es sei eine Curve als Meridian-curve für eine Schraubenfläche in der Form $z_0 = f\rho^2$ gegeben.
Drehen wir dann um w, so hebt sich dabei jeder Punkt der Curve in die Höhe, entsprechend der Steigung der Schraube, sodass z_0 um κw wächst.

Also haben wir $z = k\omega + f(\varrho^2) = k \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + f(x^2$
Dies ist die allgemeine Gl. einer Schraubenfläche um Oz. Jetzt haben wir die Diff. Gl. der Hauptangentencurven zu bilden. Es ist

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ky}{x^2+y^2} + 2x f'(\varrho^2)$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{kx}{x^2+y^2} + 2y f'(\varrho^2)$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2kxy}{(x^2+y^2)^2} + 2f'(\varrho^2) + 4x^2 f''(\varrho^2)$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{k}{x^2+y^2} + \frac{2ky^2}{(x^2+y^2)^2} + 4xy f''(\varrho^2)$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2kxy}{(x^2+y^2)^2} + 2f'(\varrho^2) + 4y^2 f''(\varrho^2).$$

Diese Werte haben wir in die Gl.

1) $$0 = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2$$

einzusetzen. Doch wollen wir vorher erst Polarcoordinaten einführen; dann wird ganz von selbst die kanonische Form der Diff. Gl. entstehen. Wir setzen:

$$x = \rho \cos\omega \qquad dx = \cos\omega\,d\rho - \rho \sin\omega\,d\omega$$

$$y = \rho \sin\omega \qquad dy = \sin\omega\,d\rho + \rho\cos\omega\,d\omega$$

Dann erhalten wir:

$$r = \frac{2K\sin\omega\cos\omega}{\rho^2} + 2f'(\rho^2) + 4\rho^2\cos^2\omega f''(\rho^2)$$

$$s = \frac{-K}{\rho^2} + \frac{2K\sin^2\omega}{\rho^2} + 4\rho^2\sin\omega\cos\omega f''(\rho^2)$$

$$t = \frac{-2K\sin\omega\cdot\cos\omega}{\rho^2} + 2f'(\rho^2) + 4\rho^2\sin^2\omega f''(\rho^2).$$

Diese Werte setzen wir nun in Gl. (1) und erhalten:

$$r\,dx^2 = \left[\frac{2K\sin\omega\cos^3\omega}{\rho^2} + 2\cos^2\omega f'(\rho^2) + 4\cos^4\omega\rho^2 f''(\rho^2)\right]d\rho^2$$
$$+\left[-\frac{4K\sin^2\omega\cos^2\omega}{\rho} - 4\sin\omega\cdot\cos\omega\rho f'(\rho^2) - 8\sin\omega\cos^3\omega\rho^3 f''(\rho^2)\right]d\rho\,d\omega$$
$$+\left[2K\sin^3\omega\cos\omega + 2\sin^2\omega\rho^2 f'(\rho^2) + 4\sin^2\omega\cos^2\omega\rho^4 f''(\rho^2)\right]d\omega^2$$

$$2s\,dx\,dy = \left[-\frac{2K\sin\omega\cos\omega}{\rho^2} + \frac{4K\sin^3\omega\cos\omega}{\rho^2} + 8\sin^2\omega\cos^2\omega\rho^2 f''(\rho^2)\right]d\rho^2$$
$$+\left[\frac{2K\sin^2\omega}{\rho} - \frac{4K\sin^4\omega}{\rho} - 8\sin^3\omega\cos\omega\rho^3 f''(\rho^2)\right.$$
$$\left.-\frac{2K\cos^2\omega}{\rho} + \frac{4K\sin^2\omega\cos^2\omega}{\rho} + 8\sin\omega\cos^3\omega\rho^3 f''(\rho^2)\right]d\rho\,d\omega$$
$$+\left[2K\sin\omega\cos\omega - 4K\sin^3\omega\cos\omega - 8\sin^2\omega\cos^2\omega\rho^4 f''(\rho^2)\right]d\omega^2$$

$$t\,dy^2 = \left[-\frac{2K\sin^3\omega\cdot\cos\omega}{\rho^2} + 2\sin^2\omega f'(\rho^2) + 4\sin^4\omega\rho^2 f''(\rho^2)\right]d\rho^2$$
$$+\left[-\frac{4K\sin^2\omega\cos^2\omega}{\rho} + 4\sin\omega\cos\omega\rho f'(\rho^2) + 8\sin^3\omega\cdot\cos\omega\rho^3 f''(\rho^2)\right]d\rho$$
$$+\left[-2K\sin\omega\cos^3\omega + 2\cos^2\omega\rho^2 f'(\rho^2) + 4\sin^2\omega\cos^2\omega\rho^4 f''(\rho^2)\right]d\omega^2$$

$\therefore$

$$0 = \left[f'(\rho^2) + 2\rho^2 f''(\rho^2)\right]d\rho^2 - \frac{K\,d\rho\,d\omega}{\rho} + \rho^2\left[f'(\rho^2) + 2\rho^2 f''(\rho^2)\right]d\omega^2$$

In dieser Gl. ist in der That x explicite verschwunden, sodass einer Integration der Gl. durch Separation und Integration nichts im Wege steht.

Da wir die in den letzten Capitel behandelten Dinge noch oft als nothwendige Werkzeuge benutzen werden, so stellen wir als beiläufiges Ergebnis der ganzen Betrachtung die Worte hin:

1) Punkttransformation -- Beispiel: Jakobische
2) Berührungs .. .. : Clairautsche
3) Eingliedrige continuierliche Gruppe von Punkttransformationen.
4) Infinitesimale Transformation einer solchen Gruppe.

§ 30. Der Euler'sche Multiplikator.

Indem wir zum Euler'schen Multiplikat übergehen, wiederholen wir noch einmal kurz unsere früheren Betrachtungen hierüber. Es sei uns eine Gl.

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

gegeben, deren linke Seite ein exactes

Diff. ist, d. h. es besteht für die Diff. Gl.:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

wir lernten kennen, dass in diesem Falle

$z = F(x\,y) = \int^x M(\xi\,y)\,d\xi + \int^y N(x\,\eta)\,d\eta + \int^x\int^y d\xi\,d\eta \left(\frac{\partial M(\xi\eta)}{\partial y} = \frac{\partial N(\xi\eta)}{\partial \xi}\right)$

war. Diese Function hat wirklich $M\,dx + N\,dy$ zum Diff. Daher hat die Schar unserer Integralcurven die Gl.

$$z = F(x\,y)$$

wo z der Parameter ist. Wir können also sagen: Ist die linke Seite unserer Diff. Gl. ein exaktes Diff., so bekommen wir unsere Integralcurve in der Gestalt $F(x\,y) = \text{const.}$, wo das F durch zwei einfache Quadraturen und eine doppelte Quadratur genommen wird. Die Integralcurven erscheinen dabei als die Niveaucurven einer Fläche $z = F(x\,y)$, die wir uns construieren, indem wir z als Ordinate im Raum auffassen. Wenn wir nun eine Gl. von der Bauart haben: $dx : dy = X : Y$ oder

$$Y\,dx - X\,dy = 0$$

so können wir uns doch die Gl.

der Integralcurven nach der willkürlich
Constanten aufgelöst denken $F(x,y) = C$
so dass die Diff. Gl. vermöge eines
Multiplicators in die Gestalt übergeht:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0.$$

Das ist ganz dasselbe, was wir früher
schon sagten, dass wir nämlich, wenn der
Ausdruck linker Hand kein exaktes Diff.
ist, einen Faktor u zu Hülfe nehmen,
durch welchen dann eben die linke Seite von

$$u Y\, dx - u X\, dy = 0$$

ein exaktes Diff. von F wird. Wir fassen
dies in den Satz zusammen:
Ist die linke Seite der vorgelegten Diff. Gl.
kein exaktes Diff., so sucht man einen
Faktor u, sodass die mit u multiplizierte
Seite ein exaktes Diff. wird, worauf man
für u die partielle Diff. Gl. erhält:

$$\frac{\partial (uX)}{\partial y} + \frac{\partial (uY)}{\partial x} = 0$$

An sich ist ja eine partielle Diff. Gl. ein
schwierigeres Problem, aber wir brauchen

hier keine allgemeine Lösung derselben, sondern nur eine particulare Lösung. Nach Auffindung einer solchen u. kann man dann sofort die vorgelegte Diff. Gl. integrieren.

§ 31. Die linearen Diff. Gleichungen erster Ordnung als Beispiel.

Nehmen wir hierfür ein erstes Beispiel. Wir werden dabei sehen, dass unsere Angaben in der That zum Ziele führen, sodass der Nutzen des ganzen Ansatzes ausser Frage steht.

Unser Beispiel soll uns mit der wichtigen Classe der linearen Diff Gl. erster Ordnung bekannt machen.

Es sei uns also vorgelegt:

1) $$y' + Py = Q.$$

wo P und Q irgend welche Functionen von x sind. Davon haben wir nun bereits einen besonderen Fall betrachtet nämlich

$$y' + cy = \varphi(x),$$

bei Gelegenheit der Construction von Apparaten zur mechanischen Integration von Diff. Gleichungen.

Um nun unsere Gl. (1.) zu behandeln wollen wir erst den besonderen Fall der linearen Diff. Gl. ohne 2tes Glied betrachten also

2) $$y' + Py = 0$$

Was Gl. (2) anbetrifft, so können wir sofort separieren. Wir bekommen:

$$\frac{dy}{y} = -P\,dx$$

$$y = K e^{-\int P\,dx}$$

Eine partikuläre Lösung sei y_0, dann ist die allgemeine Lösung

$$y = K y_0.$$

Es entsteht daher die allgemeine Lösung aus einer beliebigen partikulären Lösung y_0 durch Multiplikation mit einer willkürlichen Constante. Das ersieht man auch sofort aus der Gl. (2). Denn die partikuläre Lösung ergiebt:

2a) $$y_0' + P y_0 = 0$$

und $y = K y_0$ ergiebt:

$$K y_0' + P K y_0 = 0$$

Da hebt sich K weg und wir bekommen wieder (2°)

$$y_0' + P y_0 = 0.$$

Wenn man also y_0 hat, so ist $K y_0$ eine neue Lösung

Das obige war die Gl. ohne 2tes Glied. Nehmen wir dieses jetzt dazu: wir schreiben jetzt:

$$dy + (Py - Q)dx = 0$$

Wir fügen den Multiplikator u hinzu und bekommen:

1) $$u\,dy + u(Py - Q)\,dx = 0$$

und wollen nun u so bestimmen, dass linkerhand ein exaktes Diff. steht. Es besteht dann also für u die partielle Diff. Gl.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u(Py - Q)}{\partial y}.$$

Jetzt kommt es einzig darauf an, eine partikuläre Lösung dieser Gl. zu finden. Wir machen den Kunstgriff und lassen u nur vom x abhängen; dann haben wir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u P.$$

wir finden also $u = e^{\int P dx}$ eine partikuläre Lösung ist. Das genügt bereits um die Gl. weiter zu behandeln. Wir bekommen:

$$e^{\int P dx} dy + P e^{\int P dx} y\, dx - Q e^{\int P dx} dx = 0.$$

d.h. $$d\left(y e^{\int P dx}\right) - d\left(\int Q e^{\int P dx} dx\right) = 0$$

$$\therefore \quad y = e^{-\int P dx} \left\{ \int Q e^{\int P dx} dx + \text{Const.} \right\}.$$

Wir bemerken ausdrücklich, dass wir dieses Resultat durch die Multiplikator Methode erhalten haben.

Betrachten wir nun noch die Bauart unserer y, so haben wir zunächst einen Bestandteil, der mit der willkürlichen Constanten nichts zu thun hat. Wir wollen ihn mit $[y]$ bezeichnen, und haben also:

$$y = [y] + C e^{-\int P dx} = [y] + C y_0.$$

Wir gewinnen so den Satz:
Die allgemeine Lösung der Diff. Gl. mit 2tem Gliede baut sich in der Weise auf, dass man zu einer partikulären Lösung $[y]$ der Gl. eine partikuläre Lösung der Gl. ohne 2tes Glied mit einer beliebigen Constanten multipliziert, addiert.

Dies hätte man auch sofort aus der gegebenen Diff. Gl. ersehen können: denn wenn $[y]$ eine partikuläre Lösung der letzteren Diff. Gl. ist, so haben wir

$$[y]' + P[y] = Q.$$

Dazu wollen wir einmal addieren, entsprechend einer partikulären Lösung y_0 der ersteren Diff. Gl. ohne 2tes Glied multipliziert mit c:

$$c y_0' + P c y_0 = 0$$

und bekommen

$$([y]' + c y_0') + P([y] + c y_0) = Q$$

d. h. $$y' + P y = Q$$

wo $y = [y] + c y_0$ ist.

§32. Eine andere Behandlung derselben Gl. von der zugehörigen Transformationsgruppe aus.

Jetzt wollen wir bei dieser Diff. Gl. auch die Betrachtungen über die eingliedrige, kontinuierliche Gruppe von Transformationen zur Anwendung bringen.

In nebenstehender Fig. mag die particulare Lösung der particularen Curve[y] entsprechen. Addieren wir dann zu den Ordinaten[y] noch $c y_0$ hinzu, so bekommen wir eine neue Integralcurve u.s.f. wie die Figur zeigt beliebig viele Integralcurven. Ja, das heisst, dass die Integralcurven unserer Diff. Gl. aus einer Integralcurve durch eine ganze Schar von Transformation hervorgehen, die durch das Gleichungpaar gegeben sind:

$$y_1 = y + C e^{-\int p dx} \qquad x_1 = x,$$

wo y_1 und x_1 neue Variable bedeuten. Unsere Diff. Gl. verwandelt sich in sich selbst wenn wir y_1 und x_1 statt y und x setzen. Durch dieses Gleichungspaar ist uns aber eine ganze Gruppe von Transformationen gegeben. Wir kennen also eine eingliedrige continuierliche Gruppe von Transformationen, welche unsere Diff. Gl. in sich selbst verwandelt.

Nun führten wir nämlich als erste kanonische Variable das t so ein, dass es bei Ausübung der Gruppe konstant blieb.
Das t ist in diesem Falle $x = x_1$.
Das u aber sollte sich um eine additive Constante ändern, ja das ist hier

$$\frac{y_1}{e^{-\int \omega dx}} = \frac{y}{e^{-\int \omega dx}} + c.$$

Wir werden daher sagen:
Ein Paar kanonischer Variablen dieser Gruppe sind uns hier von Haus aus bekannt; das t ist das x selbst und das u ist $y e^{\int \omega dx}$. Führen wir diese beiden Variablen in unsere Diff. Gl. ein, so muss dieselbe direkt integrirbar werden, also ohne dass wir von der Multiplikator Methode Gebrauch machen. Dieses werden wir jetzt prüfen und damit die vorigen Integrationsformeln wieder gewinnen.
Um die kanonischen Variablen, für welche sich die Transformationen der

Entwickeln wir die linke Seite der letzten Gl., so gewinnen wir als eine erste Gl. für $\delta x, \delta y$

a) $$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y = dC$$

Eine zweite Gl. bekommen wir aus der Bedingung, dass wir senkrecht zu $F=C$ weiterschreiten, also aus

b) $$\delta x : \delta y = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Aus a) und b) ergiebt sich:

$$\delta x = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} dC \qquad \delta y = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} dC$$

Wir haben also:

Satz 1: Die Breite des zwischen zwei benachbarten liegenden Streifens ist

(1.) $$dB = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} = \frac{dC}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}$$

2.) Nun wollen wir die ganze Betrachtung auf eine vorgelegte Diff. Gl. beziehen. Es sei gegeben: $dx : dy = X : Y$ oder

$$Y\,dx - X\,dy = 0.$$

Wenden wir hierauf die Entwicklung von (1.) an, so müssen wir zunächst

mit einem Multiplikator multipliziren und können dann schreiben:

$$u\,Y = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad u\,X = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Die Breite des Streifens wird also:

2) $$dB = \frac{dC}{u\sqrt{X^2+Y^2}}$$

Wir sagen:

Satz 2: Ist eine Diff. Gl. $dx : dy = X : Y$ vorgelegt und ist u ein Multiplikator so wird die Breite des zwischen zwei benachbarten Integralcurven eingeschlossenen Streifens gleich sein einer willkürlich zu wählenden Constanten dC dividirt durch $u\sqrt{X^2+Y^2}$.

Daraus können wir sofort folgern:

Satz 3: Weiss man einen Multiplikator u, so kennt man auch das Gesetz, nach welchem sich die Breite des Streifens beim Entlanggehen an der Integralcurve bestimmt. Umgekehrt, kennt man irgendwie das Gesetz, nach welchem die Breite des Streifens beim Entlanggehen längs der Integralcurve variirt,

so erfährt man daraus einen Multiplikator
Indem wir so den Multiplikator mit der
Breite in Beziehung setzen, können wir
noch einige wichtige Sätze ableiten:
Angenommen z.B. wir kennen zwei verschi
ene Multiplikatoren u_1 und u_2, für welch
also $\frac{u_1}{u_2} \equiv C$ ausgeschlossen ist, dann bekom
wir für $d\beta$

1) $d\beta = \frac{dC}{u_1 V}$ 2) $d\beta = \frac{dC'}{u_2 V}$

Beide müssen natürlich einander
gleich sein, also wird:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{dC}{dC'} = K,$$

wo K irgend eine Constante ist. Das heiss
aber, dass wir die Gl. der Integralcurv
haben in der Form:

$$u_1 = u K.$$

und dass wir also unsere Diff. Gl.
integriert haben. Wir werden daher sagen:
Satz 4: Kennen wir für eine Diff. Gl.
zwei verschiedene Multiplikatoren, deren
Quotient nicht etwa $\equiv C$ ist so können wir d
Gl. der Integralcurven hinschreiben, indem w

$$u_1 = u_2 K$$

setzen.

Gehen wir jetzt dazu über, den eigentlichen Hauptsatz von Lie aufzustellen: Es liege eine Diff. Gl.

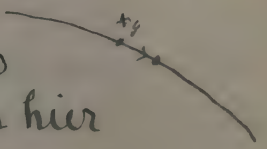
$$Y\,dx - X\,dy = 0$$

vor und diese möge durch eine infinitesimale Transformation in sich selbst übergehen. Sie soll sich also nicht ändern, wenn wir x und y vermehren um

$$\delta x = \xi(x,y)\,d\omega \qquad \delta y = \eta(x,y)\,d\omega$$

wo $d\omega$ eine beliebig anzunehmende ∞ kleine Grösse ist.

Aus einer Integralcurve soll also bei infinitesimaler Verschiebung wieder eine Integralcurve werden. Diese kann speziell in sich wieder übergehen, wenn die Verschiebung in Richtung der jeweiligen Tangente geschieht (Fig.).

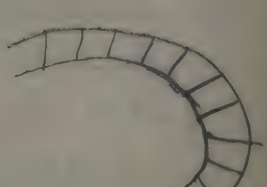


Diesen trivialen Fall, wo $\delta x : \delta y = X : Y$ ist, wollen wir hier

ausdrücklich ausschliessen.
Wir sprechen nun den Satz aus:
Kennen wir bei einer Diff. Gl. eine
infinitesimale Transformation
$\delta x : \delta y = \xi(x,y) : \eta(x,y)$ welche die Diff. Gl.
in sich überführt, und ist nicht etwa:

$$\xi : \eta = X : Y$$

dann können wir einen Multiplicator
für unsere Diff. Gl. angeben und also
unsere Gl. auf Quadraturen zurückführ
Das heisst in der Fig: Wenn unser
Gleichungspaar für δx und δy nicht etwa
trivial ist, also $\frac{\xi}{\eta} \gtrless \frac{X}{Y}$, so gehen wir von
jedem Punkte $x\,y$ der Curve $F = C$ zu
einem Punkte $x+\delta x, y+\delta y$
über, wobei die Fort-
schreitungsrichtung
nicht in die Richtung
der Tangente fällt.



Durchläuft also der Punkt $x\,y$ eine
Integralcurve, so wird der Punkt $x+\delta x, y+\delta y$
eine benachbarte Integralcurve durchlau
Dann können wir aber sofort die Breite de

Canals berechnen: Wir brauchen nur den Abstand des Punktes $x+\delta x, y+\delta y$ von der Tangente in $x\,y$ zu bestimmen. Derselbe ist:

$$d\mathfrak{B} = \frac{y\delta x - x\delta y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Für δx und δy ihre Werte eingesetzt gibt:

$$d\mathfrak{B} = \frac{y\xi - x\eta}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dw$$

wo für dw auch $d\mathfrak{C}$ gesetzt werden kann. Diese Gl. bringen wir überein mit der Gl. des 2ten Satzes, wenn wir setzen:

$$u = \frac{1}{y\xi - x\eta}$$

Damit gewinnen wir den eigentlichen Lie'schen Satz

Satz 5: Geht unsere Diff. Gl. durch die nicht triviale Transformation

$$\delta x : \delta y = \xi(x\,y) : \eta(x\,y)$$

in sich über, so ist uns ein Multiplikator bekannt:

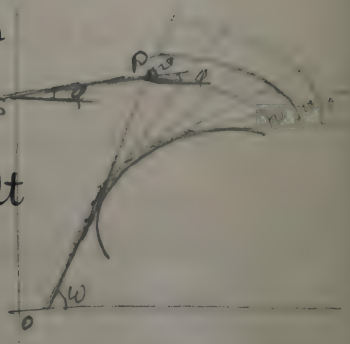
$$u = \frac{1}{y\xi - x\eta}$$

und wir können unsere Diff. Gl. sofort integrieren.

§ 34. Beispiel: Die Trajektorien einer Geradenschaar.

Wir wollen jetzt hinzu eine ganz besonders interessante Anwendung geben, nämlich auf das Problem der sogenannten Trajektorien.

Es sei uns eine Schar von geraden Linien gegeben, welche eine gewisse Curve umhüllen werden. Es soll nun die Diff. Gl. derjenigen Trajektorien aufgestellt werden, welche diese geraden Linien unter einem constanten Winkel α schneiden. Bezeichnen wir mit ω den Winkel, den eine solche Gerade mit der x-axe bildet und mit $f(\operatorname{tg}\omega)$ den Abschnitt OS auf der y-axe, so lautet die Gl. dieser Geraden:



$$y = \operatorname{tg}\omega \cdot x + f(\operatorname{tg}\omega)$$

vermöge derer nunmehr $\operatorname{tg}\omega$ als Function von x und y zu betrachten ist. Also zu

jedem Punkte x y gehört eine Gerade, die unter ganz bestimmtem Winkel durch diesen Punkt läuft. Bezeichnen wir den Richtungswinkel der Trajektorie in einem Punkte P mit φ, so haben wir:

$$\operatorname{tg}\varphi = y'.$$

Das Gesetz für unsere Trajektorien lautet nun:

$$\varphi = \omega - \vartheta.$$

Um die Diff. Gl. zu bilden, werden wir schreiben:

$$y' = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\omega - \vartheta);$$

Also ist

$$y' = \frac{\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\vartheta}{1 + \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\vartheta}$$

wo $\operatorname{tg}\omega$ eine Function von x und y ist.

Jetzt wollen wir den Streifen betrachten, der zwischen zwei benachbarten Trajektorien liegt, und untersuchen, wie sich die Breite dieses Streifens beim Entlanggehen an der Integralcurve ändert. Nehmen wir zunächst einen Streifen

von endlicher Breite, wie Fig. 1 und fassen die Strecke ξ ins Auge, welche die beiden Trajektorien von der einzelnen geraden Linie ausschneiden.

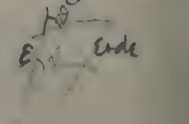


Fig. 1.

Eine zweite benachbarte gerade Linie wird uns den Winkel $d\omega$ geben. Wenn wir nun die beiden von den geraden Linien ausgeschnittenen Curvenstückchen in erster Annäherung als gradlinig betrachten, so wird Fig. 2.

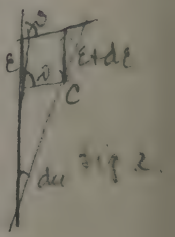


Fig. 2.

Ziehen wir nun von C aus noch eine Parallele zur ersten Geraden, so haben wir ein Dreieck mit den 3 Winkeln: $d\omega$, $\pi - \vartheta$, $\vartheta - \omega$ (Fig. 3).

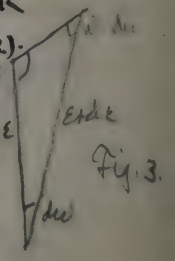


Fig. 3.

Es verhält sich also:

$$\xi : \xi + d\xi = \sin(\vartheta - d\omega) : \sin\vartheta$$

Dies können wir auch schreiben:

$$\xi : \xi + d\xi = \sin\vartheta - \cos\vartheta\, d\omega : \sin\vartheta$$

$$\therefore \quad \xi \sin\vartheta = \xi \sin\vartheta - \xi \cos\vartheta\, d\omega + \sin\vartheta\, d\xi$$

wo wir das Glied 2ter Ordnung weggelassen haben. Es ist also:

$$\frac{d\xi}{\xi} = \operatorname{cotg}\vartheta \cdot d\omega$$

$$\varepsilon = K\, e^{\operatorname{cotg}\vartheta \cdot \omega}.$$

Soll es sich nun um einen sehr schmalen Streifen handeln, so wird K sehr klein, also $K = d\,c$ und das abgeschnittene Stück wird:

$$\varepsilon = e^{\operatorname{cotg}\vartheta \cdot \omega} \cdot d\,c.$$

In Hinblick auf Fig. 4) werden wir weiter sagen:

Wir können sofort hinschreiben, wie die Breite eines solchen ∞ schmalen Streifens beim Entlanggehen längs der Integralcurve variiert, nämlich

a) $$d\,\mathfrak{B} = \sin\vartheta \cdot e^{\operatorname{cotg}\vartheta \cdot \omega} \cdot d\,c$$

Wenn wir aber die Breite kennen, so haben wir auch einen Multiplikator, um denselben bequem hinzuschreiben, werden wir unsere Diff. Gl.

$$y' = \operatorname{tg}(\omega - \vartheta)$$

in die Form setzen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(\omega-\vartheta)}{\cos(\omega-\vartheta)}$$

oder

$$Y\,dx - X\,dy \equiv \sin(\omega-\vartheta)\,dx - \cos(\omega-\vartheta)\,dy = 0$$

Als Breite eines infinitesimalen Streifens ergab sich allgemein:

$$d\mathfrak{B} = \frac{dC}{u\sqrt{x'^2+y'^2}}.$$

also in unserem Falle

b) $$d\mathfrak{B} = \frac{dC}{u}$$

Aus a) und b) ergiebt sich sofort der Wert des Multiplikators zu

$$u = \frac{1}{\sin\vartheta} \cdot e^{-\operatorname{cotg}\vartheta \cdot \omega}$$

Daraufhin können wir nun unsere Diff. Gl. durch Quadratur erledigen, und der allgemeine Satz, den wir hieran gewonnen haben, lautet:
Das Problem der Trajectorien einer Geradenschaar in der Ebene ist hierdurch auf Quadraturen zurückgeführt.
Meist findet man in den älteren Lehrbüchern ganz spezielle Diff. Gl^en dieser Art gegeben und dann wird nach einem bekannten Schema die Integral Gl. aufgestellt. Wir hingegen haben hier das Problem der Trajectorienschaar in der

Ebene ganz allgemein gelöst und zwar auf Grund der geometrischen Bedeutung des Multiplikators. Die rechnerische Durchführung im einzelnen Falle hat für uns nur noch die Bedeutung einer Verifikation.

Wegen weiterer Beispiele verweisen wir auf das schon mehrfach citierte Buch von Lie-Scheffers: Ueber Diff. Gl. en mit bekannten infinitesimalen Transformationen, 1891.

§ 35. Die Sonderstellung der Riccatischen Gleichung.

Indem wir so die Substitutions und Multiplikator-Methode behandelten haben wir immer solche Beispiele gewählt, wo es gelingt, die Integration durch Quadraturen zu geben. Wenn es jedoch nicht gelingt, durch Einführung neuer veränderlicher oder durch die Multiplikator-Methode eine Diff. Gl. auf Quadraturen zurückzubringen,

dann wird man immer versuchen, wie weit man die Diff. Gl. durch Einführung neuer veränderlichen vereinfachen kann, und dann sagen wir, diese vereinfachte Gl. ist nun als Definition einer neuen Funktions-Art anzusehen. Wir können hierüber in dieser Vorlesung natürlich nur historisch berichten.

In nächster Zeit werden wir nun Diff. Gl^en höherer Ordnung behandeln und zwar speziell zunächst lineare Diff. Gl^en 2ter Ordnung ohne zweites Glied, also Diff. Gl^en von der Form:

$$z'' + p(x) \cdot z' + q(x) \cdot z = 0.$$

Wir wollen jetzt eine Diff. Gl. 1ter Ordnung betrachten, welche auf diese Form zurückgeführt und im Zusammenhang damit als Definition einer neuen Funktions-Art angesehen werden kann; das ist die sogenannte Riccatische Gl.

Die lineare Diff. Gl. 1ter Ordnung lautete doch:

$$y' + Py = Q,$$

Fügt man noch ein Glied mit y^2 hinzu, so hat man:

1) $$y' + Py + Ry^2 = Q$$

Diese Gl. (1) ist nun die allgemeine Riccatische Gl. Die spezielle ist die wo das Glied mit y fehlt, R constant und $Q = cx^m$ ist, also

1a) $$y' + by^2 = cx^m$$

Was ist das nun für eine Funktion, die durch 1) definiert wird?
Wir machen da eine Hülfssubstitution wodurch die ganze Frage in das folgende Capitel verschoben wird.
Wir werden setzen:

$$y = \lambda \frac{z'}{z}.$$

$$y' = \lambda' \frac{z'}{z} + \lambda \frac{z''}{z} - \lambda \frac{z'^2}{z^2}.$$

Wenn wir dies in die gegebene Riccatische Gl. (1) einsetzen, so bekommen wir:

$$\frac{\lambda' z'}{z} + \frac{\lambda z''}{z} - \frac{\lambda z'^2}{z^2} + P\frac{\lambda z'}{z} + R\frac{\lambda^2 z'^2}{z^2} = Q.$$

Setzen wir noch $\lambda = \frac{1}{R}$, dann werden wir haben:

$$z'' + \frac{PR - R'}{R} \cdot z' - QRz = 0$$

Das ist in der That eine lineare Diff. Gl. 2ter Ordnung ohne zweites Glied.
Wir werden also den Satz aussprechen:
Unsere allgemeine Riccatische Gl. wird also auf diese lineare Diff. Gl. 2ter Ordnung ohne zweites Glied zurückgeführt.
Im Falle der speziellen Riccatischen Gl. $y' + by^2 = cx^m$, heisst die lineare Diff. Gl. 2ter Ordnung, auf die wir zurückgehen:

$$z'' - bc\, x^m z = 0$$

Dies ist die sogenannte Besselsche Diff. Gl., die man noch in verschiedenen anderen Formen schreiben kann.

Capitel II.

Differential Gleichungen höherer Ordnung zwischen zwei veränderlichen

§ 36. Genaue Fixierung der Funktionstheoretischen Auffassung: das absolute und das relative System.

Wir verfuhren bisher so, dass wir die vorgelegte Diff. Gl. durch eine geeignete Substitution oder einen geeigneten Multiplikator integrierbar machten. Dabei gingen wir jedoch nicht systematisch vor, sondern blieben auf einer gewissen Vorstufe der Theorie stehen, über die man aber heutzutage schon weit hinausgeschritten ist. Und zwar bestand der Mangel der bisherigen Auseinandersetzungen darin, dass wir es dem glücklichen Zufall überliessen, ob wir eine geeignete Substitution fanden oder nicht, ob wir einen Multiplikator fanden oder nicht. Die neuere Theorie jedoch verlangt

in jedem Falle eine objective Entscheidung über die Möglichkeit der Integration herbeizuführen.

Zum Zwecke einer exakten Theorie wird vor allen Dingen nötig sein, klar zu verabreden, welche Functionen als bekannt gelten sollen, und welche Hülfsmittel man gebrauchen darf, um von ihnen zu neuen Functionen aufzusteigen. In dieser Hinsicht wollen wir folgende beiden Systeme der Verabredung nennen:

I. Das absolute System.

II. " relative "

I. Bei Zugrundelegung des absoluten Systems setzt man folgende Functionen als bekannt voraus:

1) rationale Functionen.

2) algebraische "

3) Abel'sche Integrale, darin inbegriffen die cyklometrischen und elliptischen Integrale und deren Umkehrfunctionen.

Wenn uns nun irgend eine Gl. $y' = f(x,y)$ vorliegt, so wird man bei Anwendung des absoluten Systems nur solche Funktionen als Coefficienten in der Gl. gegeben denken, die selbst zu den rationalen und algebraischen Functionen gehören.

Ist uns nun eine Diff. Gl. mit rationalen oder mit algebraischen Coefficienten gegeben, so kann man verlangen, ganz systematisch zu entscheiden, ob diese Diff. Gl. eine rationale oder eine algebraische Function oder ein Abel'sches Integral oder eine neue transcendente Function definiert. Unsere bisherigen Entwickelungen geben Beispiele hierfür; aber sie geben keine klare Theorie, wann und ob es eintrifft.

Im Gegensatz hierzu geht eben die neuere Theorie systematisch vor. Das weitestgehende in Richtung der bezeichneten Fragestellung findet

man bei Painlevé in den Vorlesungen:
Leçons sur la Théorie analytique des
Equations diff., prof. à Stockholm.
(Paris, Hermann 1897).

II. Was das relative System anbetrifft, so geht man dabei folgendermassen vor: Man setzt als bekannt voraus alles Frühere und die Coefficienten der Diff. Gl., wobei man sich nicht darum kümmert, wie die Coefficienten gegeben sind. In präzisen Worten werden wir so sagen:
Das relative System entsteht, wenn man den Funktionen, welche von Haus aus bekannt sind, die Coefficienten der vorgelegten Diff. Gl. als willkürliche Funktionen hinzufügt, adjungiert, und nun Alles als bekannt ansieht, was sich aus diesen Coefficienten rational oder algebraisch oder durch Differentiation oder durch Quadraturen ableiten läßt.

Ziehen wir als Beispiel die allgemeine Riccatische Gl. heran:

$$y' + Py + Ry^2 = Q$$

wo P, Q, R Funktionen von x sind; dabei sagten wir aber nicht, was für welche Funktionen. Die allgemeine Riccatische Gl. bietet also ein Beispiel für das relative System.

Nehmen wir hingegen die spezielle Riccatische Gl.

$$y' + by^2 = cx^m$$

so bietet uns diese ein Beispiel für das absolute System, indem eben die Coefficienten ganz genau spezialisiert sind.

Die Verabredung die nun Lie in seinen Werken trifft, steht durchweg auf dem Standpunkte des relativen Systems.

Ganz analoge Forderungen müssen nun bei allen höheren Arten von Diff. Gl'en nach der Auffassung der neueren Theorie erhoben werden.

Diese Forderungen sind eben, dass man deutlich verabredet, welche Funktionen als bekannt gelten sollen, und dass man nach objektiven Criterien fragt, ob eine vorgelegte Diff. Gl. mittels bekannter Functionsclassen integriert wird. Dabei wird man in jedem Falle ein absolutes und ein relatives System unterscheiden können. Doch sind diese Betrachtungen zumeist noch wenig entwickelt. Man steht eben noch vielfach auf dem traditionellen Standpunkte, dass man sich auf gut Glück verlässt, ob eine Integration der Diff. Gl. durch einen gewählten Ansatz gelingt oder nicht.
Dasjenige Gebiet, wo dies noch am meisten gelingt, ist das der linearen Diff. Gl^en.

§ 37. Diff. Gl^en höherer Ordnung zwischen zwei veränderlichen und Systeme von Diff. Gl^en

mit mehreren veränderlichen.
Mit Rücksicht darauf, dass wir mit der Ordnung des Differentiierens beliebig hoch gehen können, ist es nun ziemlich gleichgültig, ob man eine abhängige Variable und eine Diff. Gl. hat oder n abhängige Variable und n Diff. Gl'en: Nehmen wir an, wir hätten vorliegen die Diff. Gl.

$$\Omega(x\ y\ y'\ y'') = 0$$

Setzen wir hier $y = z$ also $y'' = z'$ so können wir sagen, y und z sind beide von x abhängig und für diese beiden abhängigen veränderlichen haben wir die beiden Gl'en:

$$\Omega(x\ y\ z\ z') = 0 \qquad z - y' = 0$$

Also haben wir die eine Diff. Gl. 2ter Ordnung mit einer abhängigen veränderlichen in zwei Diff. Gl'en 1ter Ordnung mit zwei abhängigen veränderlichen zerlegt.
Jetzt wollen wir uns einmal zwei Diff. Gl'en gegeben denken, und zwar

mögen nur erste Diff. Quotienten vorkommen, so dass wir die Gl^en in die Form setzen können:

1) $y' = F(x\,y\,z)$; 2) $z' = \Phi(x\,y\,z)$.

Differentiieren wir hier Gl. (1.) so ist

3) $$y'' = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z'$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot F + \frac{\partial F}{\partial z} \Phi$$

Durch Elimination von z zwischen 1) und 3) erhalten wir

$$\Omega(x\,y\,y'\,y'') = 0$$

Wir werden also sagen: Sind zwei Gl^en 1ter Ordnung für 2 unabhängige Grössen vorgelegt, so kann man die eine der abhängigen Grössen eliminieren und bekommt eine Gl. 2ter Ordnung für die andere abhängige Grösse. Haben wir sie integriert, so erfahren wir z ohne weitere Integration aus der Gl. (1.). Dies vorausgeschickt, wollen wir uns jetzt zu den linearen Diff. Gl^en beliebig höher Ordnung mit einer oder mehreren veränderlichen wenden. Und zwar werden

wir uns besonders mit denjenigen
Gebieten befassen, welche zumeist
in der Mechanik und der Physik,
z. B. bei der Lehre von den kleinsten
Schwingungen Anwendung finden.

A. Die linearen Diff. Gl^en höherer Ordnung.

§38. Beschränkung auf zwei veränderlichen

Nehmen wir zunächst nur eine abhängige Variable, und eine unabhängige an und ferner, dass die Diff. Gl. linear in y und in seinen Ableitungen vorliegt, also die Form hat:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = q.$$

Eine solche einzelne Diff. Gl. $n$ter Ordnung kann nun auch in die Form eines Systems von Diff. Gl^en geschrieben werden. Setzen wir nämlich:

$$y = y_0, \; y' = y_1, \; y'' = y_2, \; \cdots \; y^{(n-1)} = y_{n-1}$$

so können wir sagen: wir haben n Variable $y_0 \; y_1 \cdots y_{n-1}$ und diese sind aneinander durch folgendes System von Diff. Gl^en geknüpft:

$$\frac{dy_0}{dx} = y_1$$

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2$$

$$\cdots \cdots \cdots$$

$$\frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = -p_1 y_{n-1} - p_2 y_{n-2} - \cdots - p_n y_0 + q.$$

Wir gewinnen daraus den Satz:
Die einzelne lineare Diff. Gl. n^{ter} Ordnung mit einer unbekannten Grösse lässt sich umsetzen in ein System von n linearen Diff. Gl^{en} 1ter Ordnung mit n abhängigen Grössen.

Und nun umgekehrt:
Setzen wir fest, dass in einem solchen Systeme die n Diff. Quotienten lineare Funktionen der n variablen sein, dass also die Gl^{en} vorliegen:

$$\frac{dy_0}{dx} = p_{00}y_0 + p_{01}y_1 + \cdots + p_{0\,n-1}y_{n-1} + q_0$$

$$\frac{dy_1}{dx} = p_{10}y_0 + p_{11}y_1 + \cdots + p_{1\,n-1}y_{n-1} + q_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = p_{n-1\,0}y_0 + p_{n-1\,1}y_1 + \cdots + p_{n-1\,n-1}y_{n-1} + q_{n-1}$$

so ist uns damit der allgemeine Typus eines Systems linearer Diff. Gl^{en} mit n abhängigen veränderlichen gegeben. Für die einzelne variable y_r findet man dann durch Verallgemeinerung des in §37 gegebenen Ansatzes eine lineare Diff. Gl n^{ter} Ord.

1. Constante Coefficienten.

§ 39. Die Diff. Gl.: der kleinen Schwingungen

$$y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = 0.$$

Beginnen wir jetzt mit denjenigen einfachen Fällen, die in der Mechanik eine besonders hervorragende Rolle spielen. Wir nehmen jetzt nur eine unabhängige Variable x und eine abhängige y an. Stellen wir die Gl.

$$y'' = cy$$

auf, und interpretieren wir dabei $x = t$ als Zeit, und denken wir uns y als Strecke auf einer gegebenen geraden Linie aufgetragen, so ist uns durch diese Gl. die Bewegung eines Punktes auf dieser Gerade gegeben, dessen Beschleunigung y'' ist. Die Diff. Gl. sagt nun aus, dass die Beschleunigung proportional mit dem Ausschlage ist. Ja das ist der Fall bei den Schwingungen des Pendels oder des Galvanometers etc.

Bei den oscillatorischen Bewegungen ist nun c negativ d. h. die Beschleunigung

wirkt dem Ausschlage entgegen. Wir setzen es daher $-\beta^2$, so dass unsere Gl. lautet:

1) $$y'' + \beta^2 y = 0$$

Jetzt machen wir noch die Annahme, der Punkt unterliege einer Kraft, die proportional der Geschwindigkeit ist und die Bewegung zu hemmen sucht. Dieses Zusatzglied hat dann die Form $c_1 y'$ und ist beim Pendel oder Galvanometer auf Rechnung der Reibung oder Dämpfung zu setzen. Da diese neue Kraft erzögernd wirkt ist c_1 negativ zu setzen, etwa gleich $-\alpha^2$, so dass wir als 2ten Typus erhalten:

2) $$y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = 0$$

Bisher hatten wir nur angenommen dass der Punkt nur solchen Kräften unterlag, die von y und y' abhängen, nicht etwa von t. Nun möge also noch eine äussre Kraft hinzutreten, die nur von der Zeit abhängt. Wir werden also noch ein Glied $f(t)$ zufügen und erhalten:

3) $y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = f(t)$

Im Falle (1.) und (2.) sagt man, der Punkt vollführt freie Schwingungen, während man im Falle (3.) von erzwungenen Schwingungen redet.

Wir sehen aus all' diesem, dass bereits die einfachen Gl'en die hauptsächlichen Eigentümlichkeiten zeigen, die bei linearen Diff. Gl'en mit constanten Coefficienten in Betracht kommen.

Man hat nun zwecks Integration dieser Diff. Gl. insbesondere den Zusammenhang der Exponentialfunction mit den trigonometrischen Functionen im Auge zu behalten.

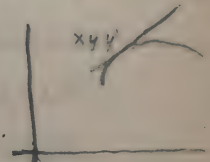
Es ist nämlich:

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}.$$

Integrieren wir jetzt Gl. (1.): Wir machen uns zunächst ein geometrisches Bild allgemein für Diff. Gl'en 2ter Ordnung ganz entsprechend dem, wie wir es bei den Diff. Gl'en 1ter Ordnung thaten.

Im rechtwinklig Coordinatensystem geht durch einen beliebigen Punkt $x\,y$ eine Curve, die eine bestimmte Richtung haben soll. Dieselbe hat in diesem Punkte die bestimmte Krümmung

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$



Wir können nun sagen: Irgend eine Diff. Gl. zwischen $x\ y\ y'\ y''$ giebt, wenn wir den Curvenpunkt $x\,y$ und die Curvenrichtung y' beliebig annehmen, y'' und somit auch die Curvenkrümmung an.

Durch eine Diff Gl. 1ter Ordnung war uns für jeden Punkt eine bestimmte Fortschreitungsrichtung in der $x\,y$-Ebene gegeben.

Da wir jetzt für gegebenes x den Anfangswert des y' noch beliebig annehmen dürfen, so erhält die allgemeine Lösung der Diff. Gl. 2ter Ordnung zwei willkürliche Constanten.

Um die Integration dieser Diff. Gl. durchzuführen, sucht man sich immer Particular-Lösungen zu verschaffen, aus denen man dann die allgemeine Lösung aufbauen kann. Es sei $y_1(x)$ eine erste Particular-Lösung und $y_2(x)$ " zweite " "
Dann ist die allgemeine Lösung für die lineare Diff. Gl. 2ter Ordnung ohne zweites Glied:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Ganz entsprechend ist die allgemeine Lösung einer linear Diff. Gl. nten Ordnung ohne zweites Glied von der Form

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

§ 40. Integration der vorstehenden Gl.
Um nun für Gl. (1.) zwei Particular-Lösungen zu finden, wendet man den Kunstgriff an $y = e^{\lambda t}$ zu setzen. Es ist dann

$$y = e^{\lambda t} \quad y' = \lambda e^{\lambda t} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Gl. (1) erhält daher die Gestalt

1a) $$e^{\lambda t}(\lambda^2 + s^2) = 0$$

$\therefore \quad \lambda = \pm i\beta$

$\therefore \quad y_1 = e^{i\beta t}, \quad y_2 = e^{-i\beta t}$

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

Für die Anwendung wünscht man natürlich reelle Lösungen zu haben; man wird daher Verbindungen aufsuchen, die reell sind.

Eine erste und zweite reelle partikuläre Lösung sind resp.

$\frac{1}{2}(y_1+y_2) = \cos\beta t, \quad \frac{1}{2i}(y_1-y_2) = \sin\beta t$

Aus diesen zusammengesetzt ist dann die allgemeine Lösung

$$y = a\cos\beta t + b\sin\beta t$$
$$= r\sin(\beta t+\varphi) = r\sin\beta(t-t_0)$$

wo $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$. $\varphi = -\beta t_0$

In dieser Schreibweise der Lösung nennt man r die Amplitude der Schwingung und t_0 die Phase.

"

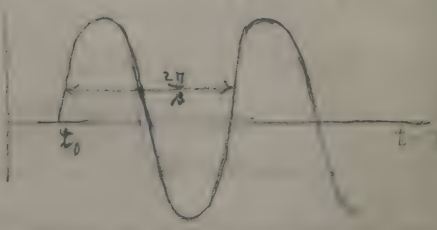
β hängt zusammen mit der Dauer einer ganzen Schwingung T, nach welcher sich die Ausschläge periodisch wiederholen.

Das ist für $\beta T = 2\pi$, also

$$T = \frac{2\pi}{\beta}.$$

ist die Dauer einer ganzen Schwingung.

Nebenstehende Figur gibt uns die geometrische Deutung unserer Gl. Wir sehen daraus:



Unsere Diff. Gl. $y'' + \beta^2 y = 0$ stellt das Gesetz der harmonischen Schwingungen dar, wie sie in der Physik vielfach, z. B. bei den Tönen einer Stimmgabel vorkommen.

§41. Speziell der Einfluss der Dämpfung.

Wir wenden uns jetzt zur Diff. Gl. der gedämpften Schwingungen:

$$y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = 0,$$

in welcher durch das Glied $\alpha^2 y'$ der Dämpfung Rechnung getragen wird.

Wir sehen wiederum zu, ob es gelingt, eine Particular-Lösung zu finden. Wir setzen wieder: $y = e^{\lambda t}$.

Dann erhält die vorgelegte Gl. die Form:

$$e^{\lambda t}(\lambda^2+\alpha^2\lambda+\beta^2)=0$$

also $\lambda^2+\alpha^2\lambda+\beta^2=0$

welche Gl. wir die charakteristische Gl. nennen. Die Wurzeln derselben sind:

$$\lambda_1=-\tfrac{1}{2}\alpha^2+\tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha^4-4\beta^2},\quad \lambda_2=-\tfrac{1}{2}\alpha^2-\tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha^4-4\beta^2}.$$

Wenn die beiden Wurzeln verschieden sind, so lautet die allgemeine Lösung:

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$$

im Falle $\lambda_1\neq\lambda_2$ d.h. $\alpha^4-4\beta^2\neq 0$.

Wir unterscheiden 3 Fälle

I $\alpha^4-4\beta^2<0$, II $\alpha^4-4\beta^2>0$, III $\alpha^4-4\beta^2=0$

I. $\alpha^4-4\beta^2<0$. Dies tritt ein, wenn $\alpha=0$ ist, wie im letzten §, oder wenn nur geringe Dämpfung vorhanden ist. Erst dann wenn die Dämpfung oder Reibung beträchtlich ist, dann wird der Ausdruck linkerhand positiv und dazwischen liegt der Fall, wo er 0 ist.

Wenn $\alpha^4-4\beta^2<0$ ist, dann haben wir

$$\lambda_1=-\tfrac{1}{2}\alpha^2+\tfrac{i}{2}\sqrt{4\beta^2-\alpha^4}\;;\quad \lambda_2=-\tfrac{1}{2}\alpha^2-\tfrac{i}{2}\sqrt{4\beta^2-\alpha^4}$$

wo die Wurzel reell ist. Es ist dann

$$y_1=e^{-\frac{\alpha^2}{2}t}\cdot e^{\frac{i}{2}\sqrt{4\beta^2-\alpha^4}\cdot t}\;;\quad y_2=e^{-\frac{\alpha^2}{2}t}\cdot e^{-\frac{i}{2}\sqrt{4\beta^2-\alpha^4}\cdot t}$$

Reelle Particular-Lösungen sind dann

$$\tfrac{1}{2}(y_1+y_2) = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 t}\cdot\cos\sqrt{\beta^2-\tfrac{\alpha^2}{4}}\cdot t \quad = (y_1)$$

$$\tfrac{1}{2}(y_1-y_2) = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 t}\cdot\sin\sqrt{\beta^2-\tfrac{\alpha^2}{4}}\cdot t = (y_2)$$

Die allgemeine Lösung lautet:

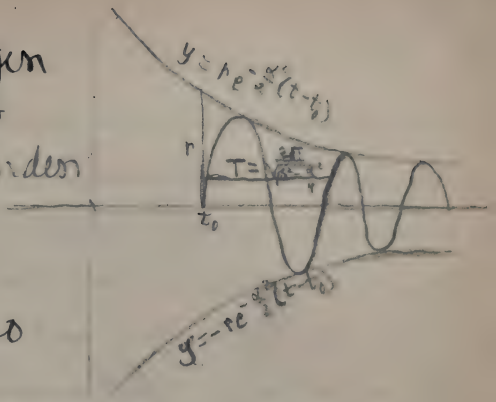
$$\begin{aligned} y &= c_1(y_1)+c_2(y_2) \\ &= r\,e^{\frac{\alpha^2}{2}(t_0-t)}\sin\left(-\sqrt{\beta^2-\tfrac{\alpha^2}{4}}\cdot t_0\right)\cos\sqrt{\beta^2-\tfrac{\alpha^2}{4}}\,t \\ &\quad + r\,e^{\frac{\alpha^2}{2}(t_0-t)}\cos\left(-\sqrt{\beta^2-\tfrac{\alpha^2}{4}}\cdot t_0\right)\cdot\sin\sqrt{\beta^2-\tfrac{\alpha^2}{4}}\cdot t \\ &= r\,e^{-\frac{\alpha^2}{2}(t-t_0)}\cdot\sin\left[\sqrt{\beta^2-\tfrac{\alpha^2}{4}}\,(t-t_0)\right] \end{aligned}$$

wo r und t_0 die Integrationsconstanten sind. Dabei wird t_0 die Phase genannt und r die zum Anfangswerte t_0 gehörige Amplitude.

Zeichnen wir uns die dieser Gl. entsprechende Curve, so wird uns dieselbe den Einfluss der Reibung sehr anschaulich darstellen. Während im vorigen § die Curve als eine Sinus-curve zwischen zwei Parallelen zur t-Axe auf und ab oscilliert, haben wir jetzt als Grenzcurven zwei zur t-Axe symmetrische Exponentialcurven, die sich derselben immer mehr nähern.

Die Nullstellen liegen bei t_0 und von da ab in constanten Abständen

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\beta^2 - \frac{\alpha^2}{4}}}.$$



Wir gewinnen also den Satz:

Mit wachsender Zeit kommt der Punkt y immer mehr zur Ruhe. Das ist das bekannte Bild, welches ein Pendel oder eine Galvanometernadel bietet, wo die Schwingungen immer kleiner und schliesslich gleich 0 werden.

Sehen wir zu, worin der wesentliche Unterschied gegenüber $\alpha = 0$ besteht. Da war die Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{\beta}$; jetzt ist dieselbe $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - \frac{\alpha^2}{4}}}$.

Die Schwingungen sind also unter sich wieder isochron, aber die Schwingungszeit ist etwas länger geworden, als wenn keine Reibung vorhanden wäre.

Der zweite Unterschied besteht darin, dass die Amplitude der Schwingungen

$$r\,e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(t-t_0)}$$

asymptotisch gegen 0 abnimmt. Man drückt dies Letztere physikalisch meist in folgender Weise aus: Man betrachtet nämlich den Logarithmus der Amplitude; er ist

$$\log r\,e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(t-t_0)} = \log r - \tfrac{1}{2}\alpha^2(t-t_0).$$

Dabei wird der Subtrahend rechterhand das „logarithmische Dekrement" genannt. Wir fassen dies in den Satz zusammen: Der Logarithmus der Amplitude nimmt proportional mit der Zeit ab. Dies nennt man die Regel vom logarithmischen Dekrement.

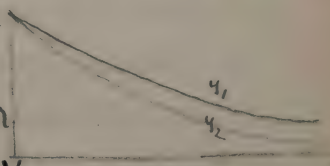
[Die physikalische Terminologie wird vielfach anders gewählt; vergl. die Darstellung bei Nernst und Schönflies]

II. Gehen wir jetzt zum anderen allgemeinen Falle, also zum Falle starker Dämpfung, wo $\frac{\alpha^2}{4} - \beta^2 > 0$ ist,

die Wurzel daraus somit reell.
Dann sind die beiden Partikular-Lösungen, die wir vom Haus aus hatten, beide null, und wir haben sofort die allgemeine Lösung in der nullen Gestalt:

$$y = C_1 \cdot e^{(-\frac{1}{2}\alpha^2 + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} - \beta^2})t} + C_2 \cdot e^{(-\frac{1}{2}\alpha^2 - \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} - \beta^2})t}$$

Was bedeutet nun diese Gl.?
Beachten wir, dass beide Exponenten negativ sind. Die beiden Partikular-Lösungen sind in der Fig. dargestellt.
Beide Curven nähern sich asymptotisch der t-Axe. Auch dieser Fall wird in der Physik angewandt, z.B. beim Galvanometer, um die Schwingungen zu vermeiden und eine möglichst ruhige Einstellung der Nadel zu erzielen.



Dies ist der Fall der sogenannten aperiodischen Dämpfung. y nimmt mit wachsendem t asymptotisch gegen null ab. Von Schwingungsdauer ist

natürlich hier keine Rede mehr denn $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ verschwindet höchstens in einem Punkte der t-Axe.

§ 42 Der Fall (III) zusammenfallender Wurzeln der characteristischen Gl.

III. Wie ist es nun mit dem Spezialfalle, wo $\frac{\alpha^4}{4} - \beta^2 = 0$ ist?

H in Lautet die Diff. Gl.

$$y'' + \alpha^2 y' + \tfrac{1}{4}\alpha^4 y = 0.$$

Setzen wir $y = e^{\lambda t}$, so bekommen wir nur eine Particular-Lösung: $y_1 = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 t}$.

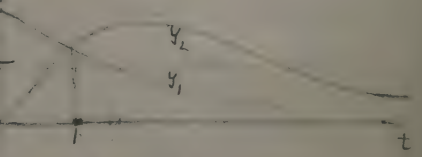
Eine zweite " " " ist $y_2 = t \cdot e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 t}$

wie man leicht verifiziert.

Die allgemeine Lösung ist wieder

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Wie die Figur zeigt, ergeben beide Particular-Lösungen Curven, die sich asymptotisch an die t-Axe anschmiegen, nur dass y_2 dieses viel langsamer thut als y_1.



Wie kommt man nun darauf y_2 in dieser

Gestalt zu verwandeln?
Seien etwa $e^{\lambda t}$ und $e^{\lambda' t}$ zwei Lösungen unserer Diff. Gl. ($\alpha^4 - 4\beta^2 \neq 0$) wo λ' sehr nahe an λ liegt: $\lambda' = \lambda + \varepsilon$.
Es wird dann auch

$$\frac{e^{(\lambda+\varepsilon)t} - e^{\lambda t}}{\varepsilon}$$

eine Partikulär-Lösung sein.
Wenn nun ε gegen 0 geht, so verwandelt sich diese letzte Lösung in

$$\frac{d e^{\lambda t}}{d\lambda} = t\, e^{\lambda t}$$

und diese Function wie wir gesehen haben erfüllt unsere Diff. Gl. in dem Falle wo $\lambda' = \lambda$.
Unser Spezialfall erscheint danach nicht als ein Ausnahmefall der allgemeinen Theorie, sondern als ein Grenzfall, der sich zwischen die beiden Fälle der allgemeinen Theorie einordnet.
Wir fassen das Resultat so zusammen
Wenn α von 0 beginnend wächst, so wächst auch die anfängliche Schwingungsdauer immer mehr, um für $\frac{1}{4}\alpha^4 - \beta^2$

unendlich gross zu werden, und von da ab unendlich gross zu bleiben, d.h. es findet ein Oscillieren überhaupt nicht mehr statt.

§ 43. Hinzutreten einer äusseren Kraft: (Erzwungene Schwingungen).

Erweitern wir die letzten Betrachtungen so, dass auf die rechte Seite ein Glied $f(t)$ tritt, d.h. im Bilde der Mechanik, dass der bewegte P auch noch nach einer von der Zeit abhängigen äusseren Kraft unterliegt. Wir haben darin: $\eta'' + \alpha^2\eta' + \beta^2\eta = f(t)$, also eine lineare Diff. Gl. 2ter Ordnung mit 2tem Gliede.

Wir wollen zunächst betrachten, wie sich die allgemeine Lösung aus Partikularlösungen zusammensetzt. In dem Falle, wo das zweite Glied nicht vorhanden ist, erhielten wir als allgemeine Lösung $c_1\eta_1 + c_2\eta_2$. Hier ist es ganz ähnlich und zwar werden wir diese Lösungen der Diff. Gl

ohne zweites Glied zu Hülfe nehmen.
Es sei η eine Partikularlösung der vollständigen Diff. Gl.

$$\eta'' + \alpha^2\eta' + \beta^2\eta = f(t)$$

Dann besteht die Gl.

1) $$\eta'' + \alpha^2\eta' + \beta^2\eta = f(t)$$

Wenn wir dann setzen:

$$y = \eta + c_1\eta_1 + c_2\eta_2$$

so befriedigt auch diese allgemeine Form die vorgelegte Diff. Gl. etc. etc.
Dies ist die allgemeine Lösung der vollständigen Gl.
Wir nannten bereits eingangs dieser Betrachtungen die Schwingungen die uns durch eine Partikularlösung η der vollständigen Diff. Gl. dargestellt werden: erzwungene Schwingungen.
Zu diesen treten also jetzt noch die freien Schwingungen entsprechend $c_1\eta_1 + c_2\eta_2$ hinzu. Also: Mit der einzelnen erzwungenen Bewegung unseres Massenpunktes überlagern sich die allgemeinsten freien Schwingungen desselben, wie wir

sie vor Kurzem betrachtet haben.

§ 44. Einfachstes Beispiel hierfür bei wegfallender Dämpfung.

Wir wollen sogleich zu einem ganz speziellen Beispiel übergehen, nämlich zu dem speziellen Beispiel der Bewegung eines Pendels oder einer Galvanometernadel etc. unter dem Einfluss einer mit $\sin ut$ proportionalen Kraft:

$$y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = \gamma \sin ut.$$

Hierbei werden wir zunächst $\alpha = 0$ annehmen, d.h. also die Reibung vernachlässigen. Wir haben dann:

a) $$y'' + \beta^2 y = \gamma \sin ut$$

Da wir es hier mit dem Falle einer direkten Anwendung zu thun haben, wollen wir sofort die reellen Lösungen angeben:

$$y_1 = \sin \beta t, \quad y_2 = \cos \beta t.$$

mögen die beiden zu benutzenden Partikularlösungen der linearen Diff. Gl. 2ter Ordnung ohne zweites Glied sein.

Hinsichtlich der Partikular-Lösung der vollständigen Diff. Gl. wollen wir versuchsweise eine mit der äusseren Kraft synchrone Schwingung wählen d.h.

$$y = c \sin \omega t.$$

Also ist $y' = c\omega \cos \omega t$, $y'' = -c\omega^2 \sin \omega t$.

Dies in Gl. (a) eingesetzt:

$$-c\omega^2 + c\beta^2 = \gamma$$

$$c = \frac{\gamma}{\beta^2 - \omega^2}$$

$$\therefore \quad y = \frac{\gamma}{\beta^2 - \omega^2} \cdot \sin \omega t$$

Diese Partikular-Lösung wollen wir jetzt kurzweg als die erzwungene Schwingung bezeichnen, während wir vorhin jede Partikular-Lösung als gezwungene Schwingung des Punktes bezeichneten.

Das allgemeine Integral wird dann lauten:

$$y = \frac{\gamma}{\beta^2 - \omega^2} \cdot \sin \omega t + C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t.$$

Wir sehen: Die allgemeine Bewegung des Punktes entsteht, indem sich über die erzwungene Schwingung die

allgemeinen freien Schwingungen überlegen.
Betrachten wir jetzt diese mit der äussern Kraft synchrone Schwingung hinsichtlich ihrer Amplitude, so können wir folgenden, dem Beobachter solcher Schwingungen ganz geläufigen Satz aussprechen:
Die Amplitude der erzwungenen Bewegung wächst nicht nur proportional der Stärke der äussern Kraft γ, sondern sie wächst auch umgekehrt proportional mit $\beta^2 - u^2$. Sie wird also um so grösser, je mehr die Periode der erzwungenen Schwingung und der freien Schwingung übereinstimmt.
Was wird nun entstehen für den Fall, dass β und u genau übereinstimmen? Man denke sich hinzu ein Pendel, bei welchem die Dauer der freien Schwingung übereinstimmt mit der von aussen einwirkenden periodischen Kraft. Unsere Gl. zeigt, dass dann gar keine gleichförmigen Schwingungen

mehr eintreten, die Amplitude wächst ins Unendliche, die Formel verliert ihren Sinn.
Jedoch ist unter den allgemeinen Lösungen dieses Falles $\alpha = \omega$ insbesondere eine partikulare Lösung enthalten, deren Gl. zunächst eine unbestimmte Form annimmt. Es wird darauf ankommen, die Bedeutung dieser Partikular-Lösung zu erfassen.
Wir wollen uns dies ganz entsprechend dem Vorgange beim Ausnahmefall der vorigen Stunde klar machen:
Es sei u nahezu gleich β, also

$$u = \beta + \varepsilon.$$

Wir wählen nun diejenige Partikular-Lösung, für welche c_2 verschwindet, und c_1, das ist jetzt die Amplitude der freien Schwingung, mit der der erzwungenen übereinstimmt.
Wir haben dann:

$$(4) = y \frac{\sin ut - \sin \beta t}{\beta^2 - u^2} = -y \frac{\sin(\beta+\varepsilon)t - \sin \beta t}{2\beta\varepsilon + \varepsilon^2}.$$

Wenn jetzt ε gegen 0 geht, so fällt zunächst das Glied ε^2 als Größe zweiter Ordnung weg, und wir erhalten:

$$(y) = -\frac{y}{2\beta}\,\frac{\sin(\beta+\varepsilon)t - \sin\beta t}{\varepsilon} =$$

$$(y_{\beta=\mu}) = -\frac{yt}{2\beta}\,\frac{d\sin\beta t}{d\beta t} = -\frac{yt}{2\beta}\cos\beta t.$$

Damit haben wir eine Particular-Lösung gefunden, die wir durch unmittelbares Einsetzen in

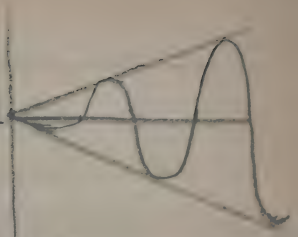
$$y'' + \beta^2 y = y\sin\beta t$$

verifizieren können. Wir gewinnen daher den Satz:

Es ist uns durch das Grenzverfahren in der That gelungen für den Ausnahmefall unserer Diff. Gl. eine Particular-Lösung zu finden. Diese Particular-Lösung wollen wir die erzwungene Schwingung des Ausnahmefalles nennen. Um die allgemeine Lösung für $\beta=\mu$ zu erhalten, haben wir noch $c_1 y_1 + c_2 y_2$ zuzufügen.

Diese erzwungene Schwingung des

Ausnahmefalles hat also
eine mit der Zeit wachsende
Amplitude und über diese
erzwungene Schwingung
lagert sich einmal eingeleibt eine
beliebige freie Schwingung über.



§45. Modification der Lösung bei zuhelfender Dämpfung.
Dies war der Fall ohne Reibung.
Ganz besonders interessant aber wird es sein diese Betrachtungen dahin zu erweitern, dass auch ein Reibungsglied in die Gl. eingeht. Dabei wollen wir immer unsere Formeln mit den aus der Beobachtung entstandenen Resultaten vergleichen.
Wir haben also:

$$y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = \gamma \sin \omega t$$

Wir nehmen α als kleine Grösse an und zwar sei $\frac{1}{4}\alpha'' < \beta^2$, d.h. wir nehmen nur geringe Reibung an. Die beiden freien Schwingungen waren nun

in reeller Form angesetzt:

$y_1 = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 t} \cdot \sin\sqrt{\beta^2 - \frac{1}{4}\alpha^2}\, t \qquad y_2 = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 t} \cdot \cos\sqrt{\beta^2 - \frac{1}{4}\alpha^2}\, t$

Die Amplituden werden hier also immer kleiner, die Schwingungen erlöschen mit der Zeit. Wie aber werden wir jetzt eine Partikular-Lösung y finden? Gehen wir wieder versuchsweise vor. Wir setzen

$$y = c \sin \omega t + c' \cos \omega t$$

(weil ein Sinusglied oder Cosinusglied allein genommen nicht genügt).

Dann wird:

$$y' = c\omega \cos \omega t - c'\omega \sin \omega t$$

$$y'' = -c\omega^2 \sin \omega t - c'\omega^2 \cos \omega t$$

Diese Werte in die linke Seite unserer Diff.-Gl. eingetragen, gibt:

$$\sin \omega t \cdot [-c\omega^2 - c'\omega\alpha^2 + c\beta^2] + \cos \omega t [-c'\omega^2 + c\omega\alpha^2 + c'\beta^2] = \gamma \sin \omega t$$

Daraus bekommen wir für c und c' zwei lineare Gleichungen:

$$(\beta^2 - \omega^2)\, c - \alpha^2 \omega c' = -c\omega^2 - c'\omega\alpha^2 + c\beta^2 = \gamma$$

$$\alpha^2 \omega c + (\beta^2 - \omega^2) c' = -c'\omega^2 + c\omega\alpha^2 + c'\beta^2 = 0$$

so berechnen sich leicht die Grössen c, c'. Wir können daher sagen: Schreiben wir

$$y = c \sin \omega t + c' \cos \omega t,$$

und berechnen wir c und c' aus obigen linearen Gl-en, so haben wir eine Particular-Lösung unserer vollständigen Diff. Gl. gefunden und diese Particular-Lösung wollen wir die erzwungene Schwingung unseres Punktes nennen.
Wir erhalten für dieselbe:

$$y = \frac{\gamma}{(\beta^2-u^2)^2+\alpha^2u^2}\left[(\beta^2-u^2)\sin ut - \alpha^2 u\cos ut\right].$$

Um dies nun besser zu verstehen, machen wir folgende trigonometrische Zusammenziehung: Wir setzen:

$$\frac{\beta^2-u^2}{\sqrt{(\beta^2-u^2)^2+\alpha^2u^2}} = \cos ut_0, \quad \frac{\alpha^2 u}{\sqrt{(\beta^2-u^2)^2+\alpha^2u^2}} = \sin ut_0$$

Dann erhalten wir:

$$y = \frac{\gamma}{\sqrt{(\beta^2-u^2)^2+\alpha^2u^2}}\sin u(t-t_0).$$

Die allgemeine Lösung lautet dann:

$$y = y + c_1y_1 + c_2y_2.$$

Wir sehen zunächst dass für $\alpha^2=0$ unsere Gl. dasselbe Resultat giebt, das wir schon bei reibungsloser Schwingungen hatten.

Nehmen wir nun aber $\alpha' > 0$; da die q_1 und q_2 hier mit der Zeit immer mehr zurücktreten, so können wir sagen: Die freien Schwingungen erlöschen mit wachsender Zeit immer mehr, so dass zuletzt nur noch die eine erzwungene Schwingung vorhanden ist. Ferner ist die Amplitude der erzwungenen Schwingung infolge des Auftretens von α etwas kleiner als im reibungslosen Zustande.

Insbesondere aber bleibt die Amplitude auch für $s = u$ endlich und der Ausnahmefall, mit dem wir uns im reibungslosen Falle beschäftigten, ordnet sich der allgemeinen El. von selbst ein.

Schliesslich unterscheidet sich der Fall mit Reibung vom reibungslosen Falle insbesondere dadurch, dass eine Phasenverschiebung eintritt; die erzwungene Schwingung folgt der äusseren Kraft erst mit einer gewissen Verspätung.

§ 46. Ueberlagerung verschiedener gezwungener Schwingungen.

Knüpfen wir hieran noch einige Verallgemeinerungen. Wir nehmen an, wir hätten zwei solcher Gl-en:

1) $y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = f_1(t)$

2) $y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = f_2(t)$

und es sei uns nun gelungen eine Partikular-Lösung y_1 der ersten Gl. und ebenso eine Partikular-Lösung y_2 der zweiten Gl. zu finden. Um dann die allgemeine Lösung zu erhalten, haben wir beiden noch zuzufügen: $C_1 y_1 + C_2 y_2$. In diesem Falle ist nun auch $y = y_1 + y_2$ eine Partikular-Lösung der Gl.

$$y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = f_1 + f_2.$$

Wir begleiten dies mit den Worten: Wenn man die Partikular-Lösungen zweier solcher Gl-en überlagert, so addieren sich die Glieder rechterhand. Desgleichen, wenn wir statt 2 noch mehr: 3, 4 ... k solcher periodischen Kräfte wirken.

lassen, so erhalten wir:

$$y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 = \sum_k y_k \sin \varkappa t.$$

Ist uns also eine solche Gl. vorgelegt, so wird man sich die Partikular-Lösung y_k für jede einzelne Kraft suchen und das allgemeine Integral unserer Diff. Gl. setzt sich dann so zusammen:

$$y = \sum y_k + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

d.h. es setzt sich zusammen aus den erzwungenen Schwingungen der Teilgleichungen und übrigens den freien Schwingungen.

Dabei haben wir noch immer an der Idee festgehalten, dass rechterhand nur trigonometrische Funktionen auftreten, aber auch für folgende Gl.

$$y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = \gamma e^{\lambda t}$$

ist sofort eine Partikular-Lösung gefunden, wenn wir nur $y = c \cdot e^{\lambda t}$ setzen. Es ist dann

$$c(\lambda^2 + \alpha^2 \lambda + \beta^2) = \gamma$$

also

$$c = \frac{\gamma}{\lambda^2 + \alpha^2 \lambda + \beta^2}.$$

Demnach können wir jede Gl. durch den bisherigen Ansatz integrieren, wenn auf der rechten Seite eine beliebige Zahl trigonometrischer Glieder oder Exponential-Glieder steht.

Allerdings, wenn rechterhand bei unserer Gl. eine unendliche Summe verschiedener Functionen $f_k(t)$ (von Sinus oder Exponential Gliedern) steht, so ist unsere Spaltungsmethode nur bedingungsweise anwendbar; wenn nämlich die Summe $\sum A_k$, die man bei dem Spaltungssatze erhält, zweimal hintereinander gliedweise differentiirt werden kann.

§47 Allgemeines über das Auftreten der linearen Diff. Gl-en mit constanten Coefficienten in der Mechanik.

Die ganze Methode, die wir zuletzt gebraucht haben, möge die Methode der Particular-Lösungen heissen, man suchte Particular-Lösungen $c.e^{\alpha t}$ oder einer

auf und baute dann die allgemeine Lösung aus den Particular-Lösungen in einfachster Weise auf.

Die so geschilderte Methode reicht nun auch aus für die linearen Diff. Gl^en n^ter Ordnung mit constanten Coefficienten, d.h. für Gl^en von der Form:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0.$$

und auch für ein allgemeines System linearer Diff. Gl^en 1^ter Ordnung mit n abhängigen Variablen und constanten Coefficienten, d.h. für ein System von der Form:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \cdots + a_{1n} y_n + \cdots$$

$$\frac{dy_2}{dt} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{2n} y_n + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \cdots + a_{nn} y_n + \cdots$$

wo dann rechts noch Sinus oder Exponential Glieder hinzutreten können. Ohne uns hier auf Details einzulassen, machen wir nun noch folgende Bemerkung. In den Lehrbüchern findet man, wie man

dieselbe Methode der Particular-Lösungen ausdehnt, entweder auf eine einzelne lineare Diff. Gl. nter Ordnung oder auf ein System von n linearen Diff. Gln 1ter Ordnung mit n Variablen, immer vorausgesetzt, dass die Coefficienten constant sind. Dabei kann auf der rechten Seite ein Aggregat von Sinus oder Exponential Gliedern hinzutreten. Hier in der Vorlesung wollen wir nun noch schildern, wie so solche allgemeine Gl'en bei den Schwingungsproblemen der Mechanik vorkommen.

Wir haben bisher nur einen Punkt betrachtet, der auf der y-Axe vermöge einer Kraft hin und her schwingt, die proportional dem y war.

Erfolgen die Schwingungen des Punktes jedoch in einer Ebene xy, so tritt neben y noch x als variable auf. Desgleichen, wenn es sich um ein Problem im Raume handelt nach z.

Die Mechanik ist aber nicht auf diese drei Grade der Freiheit beschränkt, vielmehr kann eine beliebige Anzahl von Graden der Freiheit vorkommen. Und zwar ist es da nur eine verschiedene Ausdrucksweise für ein und dieselbe Sache, wenn wir in der Mechanik Systeme von κ Graden der Freiheit betrachten, oder in der Mathematik eines Punktes im Raume von κ Dimensionen betrachten. Nehmen wir einmal κ Grade der Freiheit an und seien die κ verschiedene Coordinaten des Systems $q_1 \cdots q_\kappa$, welche zusammen gerade ausreichen, um die Lage des Systems zu beschreiben.
Dann wollen wir uns die Beschleunigung eines Punktes als lineare Function der Coordinaten gegeben denken, und zwar erstens für den Fall, dass keine Reibung vorhanden ist, also in der Form:

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2 + \cdots + \beta_{1K}y_K$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = \beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2 + \cdots + \beta_{2K}y_K$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^2y_K}{dt^2} = \beta_{K1}y_1 + \beta_{K2}y_2 + \cdots + \beta_{KK}y_K$$

und zweitens für den Fall, dass auch Reibung auftritt, also in der Form:

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \alpha_{11}y_1' + \cdots + \alpha_{1K}y_K' + \beta_{11}y_1 + \cdots + \beta_{1K}y_K$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = \quad \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^2y_K}{dt^2} = \alpha_{K1}y_1' + \cdots + \alpha_{KK}y_K' + \beta_{K1}y_1 + \cdots + \beta_{KK}y_K$$

($y_1 = 0 \cdots y_K = 0$ gibt dabei ersichtlich die Gleichgewichtslage des Systems)

In dieser Form werden die Diff. Gl'en. für die kleinen Schwingungen eines Systems von K Graden der Freiheit in den Lehrbüchern der Mechanik angesetzt, wobei die $\alpha_{1K} \cdots \beta_{1K} \cdots$ constante Grössen sind, von denen man gewöhnlich voraussetzt, dass $\alpha_{1K} = \alpha_{K1}$, $\beta_{1K} = \beta_{K1}$ ist. Auch diese Gl'en. erledigt man durch

die Methode der Partikular-Lösungen. Diese k linearen Gl'en 2ter Ordnung sind sofort mit $2k$ linearen Gl'en 1ter Ordnung mit constanten Coefficienten äquivalent wenn wir uns die y' als neue Serie von Variablen denken.

Eine genaue Durchführung dieser Dinge findet man in Routh: Rigid Dynamics, Part

2. Veränderliche Coefficienten.

§48. Die Existenz der Lösungen: Begriff des Fundamentalsystems.

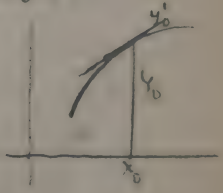
Wir wollen jetzt die linearen Diff. Gl'en mit veränderlichen Coefficienten betrachten. Dabei wollen wir uns beschränken auf die lineare Diff. Gl. 2ter Ordnung. Es sei vorgelegt:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q$$

wo p_1, p_2, q rationale Funktionen von x sind. Da wird es uns darauf ankommen, gewisse allgemeine Sätze aufzustellen und zwar zunächst für den Fall der Diff. Gl. ohne zweites Glied.

Das erste soll sein, dass wir uns die Unendlichkeitsstellen von p_1 und p_2 ansehen, eine Untersuchung, die bei den bisherigen Diff. Gl^en wegfiel. Diese Stellen, wo p_1 und p_2 gleich ∞ sind, nennen wir singuläre Werte von x im Gegensatz zu den gewöhnlichen Stellen, wo dies nicht statt hat.

1) Werfen wir zunächst die Frage nach der Existenz der Lösungen auf. XOY sei ein rechtwinkliges Coordinatensystem. Wir fragen nun, gibt es wirklich eine Funktion (oder Curve) für gegebenes y_0 und y_0'?



Bisher im Falle constanter Coefficienten waren wir dieser Frage überhoben, da wir direkt eine Lösung angeben konnten. Hier also haben wir diese Untersuchungen zu führen und wollen die Frage dahin spezialisieren, wann lässt sich y in der Nähe von x in eine

Potenzreihe

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \dots$$

entwickeln!

Diese Betrachtungen gehen im Grunde immer im Grunde auf die Untersuchung von Cauchy zurück. Da man das Existenztheorem in der meisten bezüglichen Lehrbüchern behandelt findet, und uns über dies hier zu weit führen würde, so geben wir nur die Thatsache: Man beweist nach Cauchy, dass in der Nähe jeder nichtsingulären Stelle x_0 eine und nur eine Lösung der Gl. existiert, welche die vorgeschriebenen Werte y_0 und y_0' besitzt, und sich nach dem obigen Schema in eine Potenzreihe entwickeln lässt.

2) wie wird sich zweitens die allgemeine Lösung aus Particular-Lösungen zusammensetzen?

Angenommen wir hätten eine Particular-Lösung y_1 und eine zweite y_2 berechnet, so wird genau wie im Falle

constanter Coefficienten $c_1 y_1 + c_2 y_2$ eine Lösung sein. Die Frage ist, ob dies nur die allgemeine Lösung ist?

An der Stelle $x = x_0$ habe y_1 den Wert y_1^0 und y_1' den Wert $y_1'^0$, ferner y_2 den Wert y_2^0 und y_2' den Wert $y_2'^0$; dann werden y und y' resp. gleich sein

$$y^0 = c_1 y_1^0 + c_2 y_2^0$$
$$y'^0 = c_1 y_1'^0 + c_2 y_2'^0$$

Wann können wir diese beiden letzten Gleichungen nach c_1 und c_2 auflösen? Das ist möglich, wenn die Determinante:

$$y_1^0 y_2'^0 - y_2^0 y_1'^0 \gtrless 0$$

ist. Das ist nun in der That eine sehr vernünftige Voraussetzung. Denn wäre es nicht der Fall, und wir setzten $y_2^0 = K y_1^0$ so hätten wir auch $y_2'^0 = K y_1'^0$, und es würde die eine Potenzreihe für y_2 einfach das K-fache der anderen für y_1 sein. Wir fassen das Resultat in die Worte:
Wäre die Determinante $= 0$, dann

würde y_2 direkt ein Multiplum von y_1 sein, und dann ist ja ganz selbstverständlich, dass man in der Gestalt $c_1 y_1 + c_2 y_2$ nicht die allgemeine Lösung hat; denn $c_1 y_1 + c_2 y_2$ ist dann immer nur ein Multiplum von y_1.

Was wir hier im speziellen Falle uns klar machten, hat in der allgemeinen Theorie seine Terminologie: Man sagt nämlich, wenn die Determinante nicht verschwindet, dass dann y_1 und y_2 ein Fundamentalsystem bilden.

Wir sprechen im Anschluss hieran den Satz aus:

Wenn zwei Partikular-Lösungen unserer Gl. bekannt sind, die ein Fundamentalsystem bilden, deren Determinante also an einer bestimmten Stelle $x = x_0$ nicht verschwindet, dann stellt sich die allgemeine Lösung unserer Gl. in der Gestalt dar

$$c_1 y_1 + c_2 y_2$$

3). Unter diesen Betrachtungen kommen wir dazu, diese Determinante genauer anzusehen. Wir setzen voraus, zwei Particular-Lösungen y_1 und y_2 befriedigen unsere Gl. Dann haben wir:

1) $\quad y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1 = 0$

2) $\quad y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2 = 0$

etc etc. etc.

Wir finden leicht für die Determinante

$$\Delta = \kappa\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1\, dx} = \Delta_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1\, dx}$$

wo Δ_0 der Werth von Δ an der Stelle x_0 ist.

4). Wie steht es nun mit $e^{-\int p_1 dx}$?
In dieser Exponentialfunction ist für alle Werthe von x, die nicht singulär sind der Exponent endlich und die Function selbst daher von 0 verschieden:
Resultat: Ausser etwa an singulären Stellen wird Δ von 0 verschieden, sobald Δ_0 es ist und umgekehrt; d. h. wenn zwei Particular-Lösungen

y_1 und y_2 an einer einzelnen nicht singulären Stelle ein Fundamentalsystem bilden, dann bilden sie es an anderer nicht singulären Stellen auch. Dies war zu erwarten denn $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ sollte doch nicht bloss an einer Stelle x_0 die allgemeine Lösung unserer Diff. Gl. sein.

5) Aus einer Lösung y_1 der Diff. Gl. kann man leicht eine zweite durch Quadratur erhalten

$$y_2 = y_1 \int \frac{\Delta_0 \, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1 dx}}{y_1^2} dx$$

etc. etc. wie leicht zu zeigen ist.

§ 49 Verschiedene Umformungen der Gl.

6) Es wäre nun die Frage noch, ob man die vorgelegte Diff. Gl. nicht vereinfachen kann? Und da kennt man drei Mittel zur typischen Umgestaltung:

a) Es liege die Diff. Gl. in der Form vor:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$$

Man mache die Substitution

$$y = z\, e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}$$

und es wird die Gl.

$$z'' + (p_2 - \tfrac{1}{2}p_1' - \tfrac{1}{4}p_1^2)z = 0$$

erhalten, eine Gl. der Form

6a) $$z'' + Pz = 0$$

b) Eine zweite charakteristische Umformung wird erhalten durch die Substitution

$$z = \frac{y'}{y}$$

Es wird nämlich

$$z' + z^2 + p_1 z + p_2 = 0$$

Diese Gl. ist insofern einfacher, als in ihr nur die erste Ordnung vorkommt. Sie ist die Riccati'sche Gl.

c) Setzen wir drittens

$$z = \frac{y_1}{y_2}$$

dann ist

$$\frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = 2(p_2 - \tfrac{1}{2}p_1' + \tfrac{1}{4}p_1^2)$$

Diese Rechnung geschah also in umgekehrter Richtung wie Subst. b). Hier erhalten wir eine Diff. Gl. 3ter Ordnung, wobei der Fortschritt darin besteht, daß nur der Ausdruck rechterhand

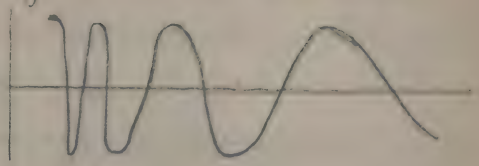
von den Coefficienten unserer Diff. Gl. abhängen.

Zugleich sehen wir auch, dass dieser Ausdruck rechts derselbe ist, wie die Klammer sub. a). Man nennt ihn die Invariante unserer Diff. Gl. Wir verweisen auf Schwarz.

Der Ausdruck $p_2 - \frac{1}{2}p_1' + \frac{1}{4}p_1^2$ heisst deshalb die Invariante der linearen Diff. Gl. 2ter Ordnung, weil er ungeändert bleibt, wenn man die Gl. 2ter Ordnung selbst abändert, indem man η für y als neue Variable einführt, unter m irgend einen Multiplicator verstanden. Von diesen drei charakteristischen Formen wähle man immer diejenige aus, die für die einzelne Fragestellung am geeignetsten scheint. Schliesslich knüpfen wir noch folgende kurze Bemerkung an die typische Form a) an.

7) Die Frage soll sein, welches ist die η estalt der Integralcurve unserer Diff. Gl. Wir betrachten $t = x$ als Zeitcoordinate

und z als Ausschlag. Unsere Gl. hat die Form $z'' = -yz$.



Wenn da y constant ist und zugleich positiv, dann ist uns die Gl. als Diff. Gl. reibungsloser Pendelschwingungen wohl bekannt. Immerhin wissen wir auch jetzt, dass die Beschleunigung z'' des sich bewegenden Punktes proportional dem Ausschlage z ist, multiplicirt noch mit einem Factor y, der mit der Zeit variirt. Der allgemeine Verlauf der Bewegung spricht sich daher so aus: In den Intervallen, wo y positiv ist, unterliegt der Punkt einer zum Ausschlag proportionalen Anziehung gegen die x-Axe, und die Integral-Curve verläuft oscillatorisch nach Art einer Sinuscurve. In den Intervallen aber, wo y negativ ist, unterliegt der Punkt einer zum Ausschlage proportionalen Abstossung und jetzt verläuft die Curve

wie eine Art Exponentialcurve.
So gibt es für das Coordinatensystem
z-x. Das ursprüngliche y ergibt sich
aus dem z der so geschilderten Curve,
indem wir das letztere mit einem
Factor multiplizieren, der nirgends 0
oder ∞ wird, ausser etwa in den
singulären Puncten. Wie aber die
Curve beim Herangehen an die
singulären Puncte verhalte, ist Sache
einer Spezialuntersuchung, die uns
hier zu weit führen würde.

§ 50. Diff. Gl-en mit zweitem Gliede.

α) Betrachten wir jetzt den Fall
einer linearen Diff. Gl. 2ter Ordnung
mit zweitem Gliede

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q.$$

Setzen wir

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

wo y_1, y_2 Lösungen der Gl. $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$
sind und wo c_1, c_2 als jetzt unbekannte
Funktionen von x sind.

Es ist

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_1' y_1 + c_2' y_2$$

Nehmen wir an dass

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

Es wird dann

$$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2'$$

und unsere Diff. durch Ersetzung dieser Werte für y' und y'' ergiebt

$$c_1(y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1) + c_2(y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2) + c_1' y_1 + c_2' y_2 = q$$

Unsere Diff. Gl. wird daher durch

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

befriedigt wenn c_1, c_2 den Gleichungen

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$
$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = q$$

Es ist dann

$$c_1 = \frac{q y_2}{y_1' y_2 - y_2' y_1}, \quad c_2 = \frac{-q y_1}{y_1' y_2 - y_2' y_1}$$
$$= \int \frac{q y_2 e^{\int p_1 dx}}{K} dx, \quad = -\int \frac{q y_1 e^{\int p_1 dx}}{K} dx$$

Als eine Lösung unserer Diff. Gl. haben wir dann

$$y = y_1 \int \frac{q y_2 e^{\int p_1 dx}}{K} dx - y_2 \int \frac{q y_1 e^{\int p_1 dx}}{K} dx$$

Als willkürliche Glieder treten noch $c_1 y_1 + c_2 y_2$ hinzu, um die allgemeine Lösung der Diff. Gl. zu ergeben.
Wir gewinnen den Satz:
Die vollständige Gl. mit zwei Gliedern lässt sich durch Quadraturen erledigen sobald man die unvollständige Gl. (d.h. die Gl. ohne zweites Glied) als gelöst voraussetzt.

§ 57. Litteratur

1) Craig 1889 Bd. I
2) Heffter
3) Schlesinger } Schüler von Fuchs
(2.) ist wenig umfangreich und befasst sich vornehmlich mit den singulären Punkten.
(3) Handbuch.
4) Picard, Traité d'Analyse II, III
5) Jordan, Cours d'analyse III
6) Klein: Ueber die hypergeometrische Functionen.
Lineare Diff. Gl'en 2ter Ordnung } 1893

Hier in der Vorlesung können wir nur diejenige linearen Diff. Gl'en. behandeln die in den Anwendungen die wichtigsten sind. Das sind die durch folgende Functionsclassen definierten:

1) Hypergeometrische Functionen.
2) Kugelfunctionen.
3) Besselsche Functionen.

Hier können natürlich diese Functions-Classen nicht ausführlich behandelt werden, vielmehr beschränken wir uns mehr oder weniger auf eine allererste Uebersicht.

§ 57. Die hypergeometrischen Functionen von der Potenzreihe aus, Diff. Gl, Integraldarstellung.

QA 303 K54
Klein, Felix
Differential- und Integral-Rechnung

Physical & Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY